Interrogation écrite n° 1

mardi 12 septembre 2017

A

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ désignent des propositions.

1) Donner la table de vérité de $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A})$.

$\mathcal{D}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2) Écrire la contraposée de $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ et sa négation.

La contraposée de $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ est $(\mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathcal{A})) \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{D}))$, c'est-à-dire $(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{D}))$.

La négation de $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ est $(\mathcal{D} \text{ et } \mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathcal{A})))$, c'est-à-dire $(\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{A})$.

3) Pour exprimer que $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- ~~$\mathcal{D}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$~~.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{D}$ soit vraie.
- ~~Si $\mathcal{D}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est fausse~~.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit fausse, il faut que $\mathrm{non}(\mathcal{D})$ soit fausse.

4) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'aucun des éléments de E ne vérifie la propriété P.

$$\forall x \in E, \ \mathrm{non}(P(x))$$

5) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la phrase « f est majorée sur $\mathbb{R}$ » avec des quantificateurs et donner sa négation.

Le fait que la fonction f soit majorée sur $\mathbb{R}$ s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \leqslant M.$$

La négation de cette phrase est

$$\forall M \in \mathbb{R}, \qquad \exists x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) > M.$$

6) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A})$ par l'absurde.

Montrons que la proposition $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A})$ est vraie par l'absurde. On suppose que $\mathcal{D}$ est vraie et que $\mathcal{A}$ est fausse. Montrons que cela conduit à une contradiction.

7) Soient a, b, c d et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$ alors $(a+c) \equiv (b+d)\,[m]$.

Puisque $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + km$ et $c = d + \ell m$. Par conséquent $a + c = b + km + c + \ell m = (b+c) + (k+\ell)m$. Puisque $k + \ell \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $(a+c) \equiv (b+d)\,[m]$.

8) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n > y^n$?

Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Soit n un entier non nul. Nous avons $x^n > y^n$ si et seulement si (n est pair et positif) ou (n est impair et négatif).

9) Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2 + bx + c < 0$?

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a $ax^2 + bx + c < 0$ si et seulement si l'une des quatre hypothèses suivantes est remplie :

- $\Delta < 0$ et $a < 0$.
- $\Delta = 0$, $a < 0$ et $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$, $a < 0$ et $x \in \left]-\infty, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right[\cup \left]\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right[$.
- $\Delta > 0$, $a > 0$ et $x \in \left]\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right[$.

Interrogation écrite n^{o} 1

mardi 12 septembre 2017

B

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent des propositions.

1) Donner la table de vérité de $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$.

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2) Écrire la contraposée de $(\text{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$ et sa négation.

La contraposée de $(\text{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$ est $(\text{non}(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{non}(\text{non}(\mathcal{B})))$, c'est-à-dire $(\text{non}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B})$.
La négation de $(\text{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$ est $(\text{non}(\mathcal{B}) \text{ et } \text{non}(\mathcal{C}))$.

3) Pour exprimer que $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- ~~Pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{C}$ soit vraie.~~
- Si $\mathcal{C}$ est fausse, alors $\mathcal{B}$ est fausse.
- ~~Pour que $\mathcal{B}$ soit fausse, il faut que $\mathcal{C}$ soit fausse.~~
- $\mathcal{C}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{B}$.

4) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'un élément de E et un seul ne vérifie pas P.

$$\exists\,!\, x \in E,\ \text{non}(P(x))$$

5) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la phrase « f est minorée sur $\mathbb{R}$ » avec des quantificateurs et donner sa négation.

Le fait que la fonction f soit minorée sur $\mathbb{R}$ s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geqslant m.$$

La négation de cette phrase est

$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad \exists x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) < m.$$

6) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ par contraposée.

Montrons que la proposition $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ est vraie par contraposée. Supposons que $\mathcal{C}$ est fausse et montrons qu'alors $\mathcal{B}$ est fausse.

7) Soient a, b, c et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$, alors $a \equiv c\,[m]$.

Puisque $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + km$ et $b = c + \ell m$. Par conséquent $a = b + km = c + \ell m + km = c + (k+\ell)m$. Puisque $k + \ell \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $a \equiv c\,[m]$.

8) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n < y^n$?

Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Soit n un entier non nul. Nous avons $x^n > y^n$ si et seulement si (n est impair et positif) ou (n est pair et négatif).

9) Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2 + bx + c > 0$?

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a $ax^2 + bx + c > 0$ si et seulement si l'une des quatre hypothèses suivantes est remplie :

- $\Delta < 0$ et $a > 0$.
- $\Delta = 0$, $a > 0$ et $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$, $a > 0$ et $x \in \left]-\infty, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right[\cup \left]\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right[$.
- $\Delta > 0$, $a < 0$ et $x \in \left]\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right[$.