Correction du DS nº 9

Partie A : Convergence de l'intégrale

1) On a $g(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \dfrac{\ln(1+h)}{h^2+2h} \underset{0}{\sim} \dfrac{h}{2h} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{g \text{ admet } \frac{1}{2} \text{ pour limite en } 1.}$

2) La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, d'après la question précédente, peut donc prolonger g par continuité en 1 en posant $g(1) = \dfrac{1}{2}$. Nous en déduisons que les intégrales $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ convergent. Ensuite on a

   - $\sqrt{t}\,g(t) \underset{0}{\sim} -\sqrt{t}\,\ln(t) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $g(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, par comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge. Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt \text{ converge.}}$
   - On a $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ donc $t^{(1+2)/2}g(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge, par comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge. Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt \text{ converge.}}$

   Nous en déduisons que $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt \text{ converge.}}$

Partie B : Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Ensuite on a $|f_x(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^2}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, par comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\right| dt$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt$ converge. Nous en déduisons que $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt \text{ converge.}}$

2) On remarque que $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{1+t^2}$ est la dérivée de $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(\operatorname{Arctan}(t)\big)^2$. Donnons-nous $A > 0$. On a alors :

$$\int_0^A \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\big(\operatorname{Arctan}(t)\big)^2\right]_0^A = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Arctan}(A)\big)^2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

   Ainsi $\boxed{F(1) = \dfrac{\pi^2}{8}.}$

3) a) Soit $h : u \longmapsto \operatorname{Arctan}(u) - u$. La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $h'(u) = \dfrac{1}{1+u^2} - 1 = \dfrac{-u^2}{1+u^2} \leqslant 0$. Ainsi h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $h(0) = 0$, nous en déduisons que $\boxed{\operatorname{Arctan}(u) \leqslant u \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}_+.}$

   b) Soit $x \in]0,+\infty[$. La relation de Chasles entraîne que

$$|F(x) - F(0)| = F(x) = \int_0^{1/x} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

- Si $t \in [0, 1/x]$, alors $\dfrac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2} \leqslant \dfrac{tx}{1+t^2}$ d'après la question précédentes. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1/x]$ donc son intégrale sur $[0, 1/x]$ converge et, par propriété de croissance des intégrales, on a $\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt \leqslant x \int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.
- Si $t \in [1/x, +\infty[$, alors $\dfrac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[1/x, +\infty[$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{t^2}$ donc son intégrale sur $[1/x, +\infty[$ converge (par comparaison de fonctions positives) et, par propriété de croissance des intégrales, on a $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Ainsi $\boxed{|F(x) - F(0)| = F(x) \leqslant x \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{\pi}{2}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.}$

c) Soit $x \in \,]0, +\infty[$. On a

- $\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^{1/x} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \ln(x).$
- Soit $A > 1/x$. On a $\displaystyle\int_{1/x}^{A} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan}(A) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

d) Nous en déduisons que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$,

$$|F(x) - F(0)| \leqslant \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - x\ln(x) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

On a $x\ln\left(x^2+1\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (par produit), $x\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées) et $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc la somme ci-dessus tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Par encadrement, on en déduit que $|F(x) - F(0)| \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Cela signifie que $\boxed{F \text{ est continue en } 0.}$

Partie C : Une nouvelle expression de $F(x)$ pour $x > 0$

1) La fonction $\varphi_x : t \longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2t^3}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge, par comparaisons de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt$ converge. Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt \text{ converge.}}$

2) a) Soit $A > 0$. On a

$$\int_0^A \varphi_1(t)\,dt = \int_0^A \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{2(1+t^2)}\right]_0^A = \frac{-1}{2(1+A^2)} + \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient que $\boxed{F'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt = \frac{1}{2}.}$

b) Soit $x \in \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$. Les réels A_x et B_x vérifient la condition souhaitée si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t = A_x 2tx^2(1+t^2) + B_x 2t(1+t^2x^2)$ (il s'agit de l'égalité des numérateurs, après avoir mis sous le même dénominateur). C'est le cas si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $1 = 2(A_x x^2 + B_x) + 2t^2x^2(A_x + B_x)$. Il faut donc que $A_x = -B_x$ puis que $1 = 2A_x(x^2-1)$. On vérifie alors que $\boxed{A_x = -B_x = \dfrac{1}{2(x^2-1)} \text{ conviennent.}}$

c) Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Soit $A > 0$. Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2x^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sont continues sur $[0,A]$ dont leurs intégrales respectives sur $[0,A]$ sont bien définies. On a

$$\begin{aligned}\int_0^A \varphi_x(t)\,dt &= \frac{1}{2(x^2-1)}\int_0^A \frac{2tx^2}{1+t^2x^2}\,dt - \frac{1}{2(x^2-1)}\int_0^A \frac{2t}{1+t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2(x^2-1)}\left(\left[\ln(1+t^2x^2)\right]_0^A - \left[\ln(1+t^2)\right]_0^A\right) = \frac{1}{2(x^2-1)}\ln\left(\frac{1+A^2x^2}{1+A^2}\right)\end{aligned}$$

On a $\dfrac{1+A^2x^2}{1+A^2} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A^2x^2}{A^2} = x^2$ donc $\ln\left(\dfrac{1+A^2x^2}{1+A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x^2) = 2\ln(x)$. Ainsi $\boxed{F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}.}$

d) Nous en déduisons que F' est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et nous avons vu dans la partie A que F' admet une limite finie en 1 qui vaut $\dfrac{1}{2} = F'(1)$. Par conséquent $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

3) a) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]0,x[$, on a alors

$$F(x) - F(\varepsilon) = \int_\varepsilon^x F'(t)\,dt = \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$$

puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge. Enfin puisque F est continue en 0, on a $F(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} F(0) = 0$. Ainsi, par unicité de la limite, $\boxed{F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.}$

b) Soit $x \in]1,+\infty[$. On a $F(x) - F(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.$

Soit $A \in]1,x[$. Faisons le changement de variables $u = 1/t$ (de classe C^1 sur $[A,x]$, avec $t = 1/u$ et « $dt = -du/u^2$ ») :

$$\int_A^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \int_{1/A}^{1/x} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^2}-1}\,\frac{-du}{u^2} = \int_{1/x}^{1/A} \frac{-\ln(u)}{1-u^2}\,du = \int_{1/x}^{1/A} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,du.$$

Faisons tendre A vers 1. Par unicité de la limite, on obtient que

$$F(x) - F(1)\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi $\boxed{F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{x}\right).}$

c) Puisque F est continue en 0, nous obtenons que $F\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} F(0) = 0$ et donc $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2F(1) = \dfrac{\pi^2}{4}.}$

d) Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ convergent, nous en déduisons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge et on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi^4}{4}.}$$

Partie D : Dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$

Donnons-nous $x \in]0,+\infty[$.

1) La fonction Arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a $\operatorname{Arctan}'(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$ et

$$|\operatorname{Arctan}''(u)| = \left|\frac{-2u}{(1+u^2)^2}\right| = \frac{1}{1+u^2}\,\frac{2|u|}{1+u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}$$

puisque $2u \leqslant 1+u^2$ (en effet $1+u^2-2|u| = (1-|u|)^2 \geqslant 0$).

2) La fonction Arctan est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange entraîne que

$$\left|\operatorname{Arctan}(b)-\operatorname{Arctan}(a)-(b-a)\operatorname{Arctan}'(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\max_{u\in I}\left|\operatorname{Arctan}''(u)\right|.$$

La question précédente entraîne alors que

$$\boxed{\left|\operatorname{Arctan}(b)-\operatorname{Arctan}(a)-\frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).}$$

3) Soient $h\in\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[$ et $t\in\mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité précédente avec $a=t(x+h)$ et $b=tx$, on obtient

$$\boxed{\left|\operatorname{Arctan}(t(x+h))-\operatorname{Arctan}(tx)-\frac{th}{1+t^2x^2}\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\,\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}},}$$

puisqu'alors $b-a=th$ et $1+u^2\geqslant 1+\left(\frac{tx}{2}\right)^2$ pour tout $u\in I=[\min(tx,t(x+h)),\max(tx,t(x+h))]$.

4) La fonction ψ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\psi_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{x^2t^2}$. Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, par comparaisons de fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\psi_x(t)\,dt$ converge. Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt \text{ converge.}}$

5) Il découle de la question c que, pour tous $h\in\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$-h^2\,\frac{2t^2}{4+t^2x^2}\leqslant \operatorname{Arctan}(t(x+h))-\operatorname{Arctan}(tx)-h\,\frac{t}{1+t^2x^2}\leqslant h^2\,\frac{2t^2}{4+t^2x^2}.$$

En divisant par $1+t^2>0$, nous obtenons $-h^2\,\psi_x(t)\leqslant f_{x+h}(t)-f_x(t)-h\,\varphi_x(t)\leqslant h^2\,\psi_x(t)$. Puisque les intégrales sur $[0,+\infty[$ des fonctions f_{x+h}, f_x, φ_x et ψ_x convergent, la propriété de croissance des intégrales généralisées convergentes entraîne que

$$-h^2\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}\left(f_{x+h}(t)-f_x(t)-h\varphi_x(t)\right)\,dt\leqslant h^2\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt$$

Par linéarité, nous en déduisons que

$$\boxed{\left|F(x+h)-F(x)-h\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,dt\right|\leqslant h^2\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt.}$$

6) Pour tout $h\in\left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[$, on a alors

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,dt\right|\leqslant h\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Par encadrement, nous en déduisons que F est dérivable en x et que $\boxed{F'(x)=\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,dt.}$