Devoir surveillé nº 9

mardi 15 mai 2018

La durée de cette épreuve est de deux heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ *et* $\Leftrightarrow$ *sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Problème : Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$

Partie A : Convergence de l'intégrale

1) Montrer que $g : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ admet une limite finie en 1 que l'on précisera.

2) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ convergent et en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge.

Partie B : Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

1) Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt$ converge

On définit alors la fonction F par, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1+t^2}\,dt$.

2) Calculer $F(1)$.

3) a) Montrer brièvement que, pour tout $u \in [0,+\infty[$, $\mathrm{Arctan}(u) \leqslant u$.

   b) Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad |F(x)-F(0)| = F(x) \leqslant x \int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{\pi}{2}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

   On vérifiera bien entendu que toutes ces intégrales convergent.

   c) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   d) Conclure que F est continue en 0.

Partie C : Une nouvelle expression de $F(x)$ pour $x > 0$

On admet pour le moment (on montrera ce résultat dans la partie D) que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,dt.$$

1) Vérifier que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale définissant $F'(x)$ est bien convergente.

2) a) Calculer $F'(1)$.

b) Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Chercher des réels A_x et B_x (qui dépendent de x mais pas de t), tels que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = A_x \frac{2tx^2}{1+t^2x^2} + B_x \frac{2t}{1+t^2}.$$

c) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

d) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$.

b) Justifier que, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On se ramènera à une écriture sous forme d'intégrale et on effectuera le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$.

Partie D : Dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$

Donnons-nous $x \in]0,+\infty[$.

1) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan}''(u)| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$.

2) Soient a et b deux réels distincts. Notons I le segment dont les extrémités sont a et b. Montrer que

$$\left|\operatorname{Arctan}(b) - \operatorname{Arctan}(a) - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).$$

3) En déduire que, pour tous $h \in \left]-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{Arctan}(t(x+h)) - \operatorname{Arctan}(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

4) Posons $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$ et $\psi_x : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{2t^2}{(1+t^2)(4+t^2x^2)}$.

Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$ converge (on a déjà montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt$ converge).

5) Montrer alors que, pour tout $h \in \left]-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[$,

$$\left|F(x+h) - F(x) - h\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt\right| \leqslant h^2 \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt.$$

6) En déduire que F est dérivable en x et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt.$.