Correction du DS n° 8

Apéritif :

1) $\boxed{\texttt{sum(rand(1,100)<1/6)}}$

2) a)

```
function   y=ApproxLog(x,n)
y=0;
for  k=1:n
     y=y+(-1)∧(k-1).*x∧k/k;
end
endfunction
```

b) On exécute d'abord la fonction de la question précédente. Puis, dans la console, on tape :

```
--> X=linspace(-1/2,1,10000);
--> plot(X,log(1+X),'r');
--> plot(X,ApproxLog(X,10),'b');
```

Exercice 1 : Endomorphisme annulé par un polynôme de degré 2

Partie A : Un exemple

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Considérons $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \big(ax+(b-a)y, by, (a-b)y+az\big)$.

1) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs elle est linéaire. En effet, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
&f\big(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\big) = f\big(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z'\big)\\
&\quad= \big(a(\lambda x+x')+(b-a)(\lambda y+y'), b(\lambda y+y'), (a-b)(\lambda y+y')+a(\lambda z+z')\big)\\
&\quad= \big(\lambda(ax+(b-a)y)+(ax'+(b-a)y'), \lambda(by)+by', \lambda((a-b)y+az)+((a-b)y'+az')\big)\\
&\quad= \lambda\big(ax+(b-a)y, by, (a-b)y+az\big)+\big(ax'+(b-a)y', by', (a-b)y'+az'\big)\\
&\quad= \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z').
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

2) Supposons que $a \neq b$.

a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

- On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff f(x,y,z) = a(x,y,z)\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & (b-a)y & & & = & ax\\ & & by & & & = & ay\\ & & (a-b)y & + & az & = & az \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} (b-a)y & = & 0\\ by & = & ay\\ (a-b)y & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff y = 0\\
&\iff (x,y,z) = x(1,0,0)+z(0,0,1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_a = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big).}$

- On a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f-b\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff f(x,y,z)=b(x,y,z)\\
&\iff \begin{cases} ax + (b-a)y = bx\\ by = by\\ (a-b)y + az = bz\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} (a-b)x + (b-a)y = 0\\ (a-b)y + (a-b)z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = y\\ z = -y\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)=y(1,1,-1)
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{E_b=\operatorname{Vect}\big((1,1,-1)\big).}$

b) Raisonnons par analyse/synthèse. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

- Supposons que $(x,y,z)=(u,0,v)+(w,w,-w)\in E_a+E_b$. On a alors $w=y$ puis $v=z+w=z+y$ et $u=x-w=x-y$. Ainsi, si (x,y,z) se décompose comme la somme d'un vecteur de E_a et d'un vecteur de E_b, alors la décomposition est unique.
- Réciproquement, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^*$, on vérifie qu'on a $(x,y,z)=(x-y,0,z+y)+(y,y,-y)$ avec $(x-y,0,z+y)\in E_a$ et $(y,y,-y)\in E_b$.
- Nous en déduisons que (x,y,z) se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur de E_a et d'un vecteur de E_b.

Ainsi $\boxed{E_a\oplus E_b=\mathbb{R}^3.}$

c) L'analyse/synthèse de la question précédente entraîne que

- $\boxed{\text{La projection sur } E_a \text{ parallèlement à } E_b \text{ est } p:(x,y,z)\longmapsto(x-y,0,z+y).}$
- $\boxed{\text{La projection sur } E_b \text{ parallèlement à } E_a \text{ est } p:(x,y,z)\longmapsto(y,y,-y).}$

3) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$
\begin{aligned}
f^2(x,y,z)&=f\big(ax+(b-a)y,by,(a-b)y+az\big)\\
&=\big(a(ax+(b-a)y)+(b-a)(by),b(by),(a-b)(by)+a((a-b)y+az)\big)\\
&=\big(a^2x-a^2y+b^2y,b^2y,-b^2y+a^2y+a^2z\big)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\big((a+b)f-ab\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)(x,y,z)\\
&\qquad=(a+b)\big(ax+(b-a)y,by,(a-b)y+az\big)-ab(x,y,z)\\
&\qquad=\big(a(a+b)x+(b^2-a^2)y-abx,(a+b)by-aby,(a^2-b^2)y+a(a+b)z-abz\big)\\
&\qquad=\big(a^2x+(b^2-a^2)y,b^2y,(a^2-b^2)y+a^2z\big)=f^2(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{f^2=(a+b)f-ab\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } P(f)=0 \text{ avec } P=X^2-(a+b)X+ab=(X-a)(X-b).}$

Partie B : Le cas général

Bien sûr, il fallait supposer de plus que $a\neq b$ sinon les endomorphismes de la question 1 ne sont pas même pas définis (petit oubli d'énoncé...).

1) Puisque $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel et puisque $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on a $p=\dfrac{f-a\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}}{b-a}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $q=\dfrac{f-b\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}}{a-b}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Ensuite

$$
\begin{aligned}
p\circ p=\frac{1}{(b-a)^2}\big(f^2-2af+a^2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)&=\frac{1}{(b-a)^2}\big((a+b)f-ab\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}-2af+a^2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)\\
&=\frac{1}{(b-a)^2}\big((b-a)f-a(b-a)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)=\frac{f-a\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}}{b-a}=p
\end{aligned}
$$

et, de même $q \circ q = q$. Ainsi $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}}$

On vérifie que $p \circ q = \dfrac{-1}{(b-a)^2}(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$ et $q \circ p = \dfrac{-1}{(a-b)^2}(f - b\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{Id}_E) = 0$, puisque les polynôme en f commutent. On a bien $\boxed{p \circ q = q \circ p = 0.}$

2) Puisque p est un projecteur, on a $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$. Or

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}\left(\frac{f - a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}}{b-a}\right) = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = E_a$$

et

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}\left(\frac{f - b\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}}{a-b}\right) = \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = E_b.$$

Ainsi $\boxed{E_a \oplus E_b = E.}$

3) - Si $ab \neq 0$, alors on a $\dfrac{1}{ab}\big((a+b)f - f^2\big) = \mathrm{Id}_E$ donc

$$f \circ \big(\frac{a+b}{ab}\,\mathrm{Id}_E - \frac{1}{ab}f\big) = \big(\frac{a+b}{ab}\,\mathrm{Id}_E - \frac{1}{ab}f\big) \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

  Ainsi $\boxed{\text{si } ab \neq 0, \text{ alors } f \text{ est un automorphisme et } f^{-1} = \dfrac{a+b}{ab}\,\mathrm{Id}_E - \dfrac{1}{ab}f.}$

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $f \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$. Si f est un automorphisme alors, en composant à gauche par f^{-1}, on obtient $f = b\,\mathrm{Id}_E$, ce qui est exclu.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ f = 0$. Si f est un automorphisme alors, en composant à droite par f^{-1}, on obtient $f = a\,\mathrm{Id}_E$, ce qui est exclu.

Finalement $\boxed{f \text{ est un automorphisme si et seulement si } ab \neq 0.}$

4) a) On vérifie immédiatement que $\boxed{f = bp + aq.}$

b) Mais puisque bp et aq commutent, la formule du binôme de Newton entraîne que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bp)^k \circ (aq)^{n-k} = a^n q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}\, p \circ q + b^n p^n = \boxed{b^n p + a^n q = f^n}.$$

En effet p et q sont des projecteurs donc $p^k = p$ et $q^k = q$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Lancers de jetons et rang d'apparition

Adapté de EDHEC 2005.

Partie A : Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité recherchée est $U_1 \cap \cdots \cap U_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E, \overline{E})$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right) = \mathbb{P}_E\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right)\mathbb{P}(\overline{E}).$$

Par indépendance des lancers avec le jeton J1, on a

$$\mathbb{P}_E\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_E\left(U_k\right) = p^n.$$

Le jeton 2 n'ayant que des faces portant le numéro 1, on a $\mathbb{P}_{\overline{E}}\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right) = 1$. Enfin, les jetons étant choisis au hasard, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{E}) = \dfrac{1}{2}$. Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}\left(U_1 \cap \cdots \cap U_n\right) = \frac{1 + p^n}{2}.}$$

b) On cherche $\mathbb{P}_{U_1\cap\cdots\cap U_n}(E)$. D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{U_1\cap\cdots\cap U_n}(E) = \frac{\mathbb{P}_E(U_1\cap\cdots\cap U_n)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(U_1\cap\cdots\cap U_n)} = \frac{p^n\,\frac{1}{2}}{\frac{1+p^n}{2}} = \frac{p^n}{1+p^n}.$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il ait joué avec le jeton J1 est donc } \frac{p^n}{1+p^n}.}$

Puisque $p\in\,]0,1[$, on a $p^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci se comprend bien dans la mesure où, si l'on obtient une infinité de fois la face portant le numéro 1, il est quasi-certain que l'on joue avec le jeton numéro 2, ce qui signifie qu'il est quasi-impossible que l'on joue avec le jeton numéro 1.

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E,\overline{E})$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(X=n\right) = \mathbb{P}_E\left(X=n\right)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}\left(X=n\right)\mathbb{P}(\overline{E}).$$

Sachant qu'on a choisi le jeton J1, la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $1-p$ puisqu'elle compte le nombre d'expériences de Bernoulli (obtenir 1 ou 0) indépendants et identiques nécessaires pour obtenir le premier succès (obtenir 0). Ainsi $\mathbb{P}_E\left(X=n\right) = (1-p)p^{n-1}$.

Ensuite $\mathbb{P}_{\overline{E}}\left(X=n\right) = 0$ car le jeton J2 n'a pas de face portant le numéro 0. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \frac{(1-p)p^{n-1}}{2}.}$

b) Comme, d'après l'énoncé, X est une variable aléatoire, on a

$$\mathbb{P}(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = 1.$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)p^{n-1}}{2} = 1 - \frac{1-p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}p^{n-1} = 1 - \frac{1-p}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}p^k = 1 - \frac{1-p}{2}\frac{1}{1-p}$$

et donc on a bien $\boxed{P(X=0) = \frac{1}{2}.}$

Ce résultat était prévisible car on sait que, avec le jeton J1, on obtient presque sûrement le numéro 0. Par conséquent, l'événement « ne jamais obtenir la face portant le numéro 0 » est l'événement « choisir le jeton J2 » qui est de probabilité $\frac{1}{2}$.

c) On a $n^4\mathbb{P}(X=n) = \frac{1-p}{2p}\,n^4p^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n^2\mathbb{P}(X=n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que $\sum_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}(X=n)$ converge. Ainsi $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre 2.}}$

On a

$$\mathbb{E}(X) = 0\times\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n) = \frac{1-p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}np^{n-1} = \frac{1-p}{2}\,\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{2(1-p)},$$

et, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(X=n) = \frac{1-p}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p^{n-1} = \frac{1-p}{2}\left(p\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1}\right)$$
$$= \frac{1-p}{2}\left(\frac{2p}{(1-p)^3} + \frac{1}{(1-p)^2}\right)$$
$$= \frac{1+p}{2(1-p)^2}.$$

Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dfrac{1+p}{2(1-p)^2} - \dfrac{1}{4(1-p)^2} = \boxed{\dfrac{1+2p}{4(1-p)^2}}.$

3) a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E, \overline{E})$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}_E(Y=1)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}(Y=1)\,\mathbb{P}(\overline{E}) = p \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(Y=1) = \dfrac{1+p}{2}.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E, \overline{E})$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}_E(Y=n)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}(Y=n)\,\mathbb{P}(\overline{E}).$$

Sachant qu'on a choisi le jeton J1, la variable aléatoire Y suit une loi géométrique de paramètre p puisqu'elle compte le nombre d'expériences de Bernoulli (obtenir 1 ou 0) indépendants et identiques nécessaires pour obtenir le premier succès (obtenir 1). Ainsi $\mathbb{P}_E(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

Ensuite $\mathbb{P}_{\overline{E}}(Y=n) = 0$ car le jeton J2 ne porte que des 1 donc, si on l'a choisi, on ne peut pas obtenir 1 pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{2}.}$

c) Comme, d'après l'énoncé, Y est une variable aléatoire, on a

$$\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n) = 1.$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{1+p}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{n-1}}{2} = 1 - \frac{1+p}{2} - \frac{p}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k+1}$$
$$= 1 - \frac{1+p}{2} - \frac{p(1-p)}{2}\frac{1}{1-(1-p)} = 0.$$

On a bien $\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = 0.}$

Cela n'a rien d'étonnant car, avec le jeton J1, on obtient presque sûrement la face portant le numéro 1 et, avec le jeton J2 , il est certain qu'on l'obtiendra à tous les lancers.

Partie B : Simulation des variables aléatoires X et Y

1)
```
p=input('Entrez un réel p compris entre 0 et 1 strictement :')
J=1+(rand()<1/2);//J contient 1 avec probabilité 1/2 et 2 avec probabilité 1/2
if  J==1;   then
       X=1;
       while  rand()<p//Tant qu'on obtient 1 (avec proba p) on relance la pièce
              X=X+1;
       end
else
       X=0
end
disp(X)
```

2)
```
functionY=SimulY(p)
J=1+(rand()<1/2);//J contient 1 avec probabilité 1/2 et 2 avec probabilité 1/2
if  J==1;   then
       Y=1;
       while  rand()>p//Tant qu'on obtient 0 (avec proba 1-p) on relance la pièce
              Y=Y+1;
       end
else
       Y=1
end
endfunction
```

Exercice 3 : Fonctions absolument monotones

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. On dit qu'une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est absolument monotone (AM en abrégé) si f est de classe C^∞ sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A : Exemples et premières propriétés des fonctions AM

1) Soient f et g deux fonctions AM sur I. En particulier $f+g$ et fg sont de classe C^∞ sur I.
   - Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ et $g^{(n)}(x) \geqslant 0$ donc $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x) \geqslant 0$ puisque . Ainsi $\boxed{f+g \text{ est AM sur } I}$.
   - Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, la formule de Leibniz entraîne que
   $$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geqslant 0,$$
   puisque $f^{(k)}(x) \geqslant 0$ et $g^{(n-k)}(x) \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Ainsi $\boxed{fg \text{ est AM sur } I}$.
   - Par contre $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions AM n'est pas un espace vectoriel}}$ puisque, par exemple, si f est AM, $-f$ ne l'est pas.

2)
   - La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x) \geqslant 0$ donc $\boxed{\exp \text{ est AM sur } \mathbb{R}.}$
   - La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est de classe C^∞ sur $I =]-\infty, 1[$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$ et, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} \text{ est AM sur }]-\infty, 1[.}$

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)\frac{\tan^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(\tan')^{(n)}}{n!} = \frac{(1+\tan^2)^{(n)}}{n!} = \frac{(\tan^2)^{(n)}}{n!}.$$

La formule de Leibniz entraîne donc que

$$(n+1)\frac{\tan^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{(k)}\tan^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\tan^{(k)}}{k!}\frac{\tan^{(n-k)}}{(n-k)!}.$$

En évaluant en $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient que $\boxed{(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$

b) Tout d'abord $\tan$ est de classe C^∞ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donnons-nous $x \in I$. On a $\tan^{(0)}(x) = \tan(x) \geqslant 0$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) \geqslant 0$ et ensuite par récurrence immédiate via la formule de la question précédente, on obtient que $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{\tan \text{ est AM sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.}$

Partie B : Développement en série entière des fonctions AM

1) Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b < R$.

a) Puisque f est AM sur I, elle est de classe C^∞ sur I. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule de Taylor avec reste intégral entraîne que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

De plus, pour tout $t \in [a,b]$, $f^{(n+1)}(t) \geqslant 0$ et $(b-t)^n \geqslant 0$. La propriété de positivté de l'intégrale entraîne que $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \geqslant 0$ et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \leqslant f(b).}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs (puisque f est AM et $b-a > 0$) et elle est majorée par $f(b)$. Par conséquent le théorème de comparaison des séries à termes positifs entraîne que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \text{ converge et sa somme est majorée par } f(b).}$

c) Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ converge, son terme général converge vers 0, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = 0.}$

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, R[$. Puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur $[0, R[\subset I$, la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur $[0, R[$. Par conséquent $0 \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant f^{(n+1)}(x)$ pour tout $t \in [0, x]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dt &= f^{(n+1)}(x)\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= f^{(n+1)}(x)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x).}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-R, 0\right]$. Puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur $\left]-R, 0\right] \subset I$, la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur $\left]-R, 0\right]$. Par conséquent $0 \leqslant f^{(n+1)}(0) \leqslant f^{(n+1)}(t)$ pour tout $t \in [x, 0]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt &\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\, dt \\
&= f^{(n+1)}(0) \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt \\
&= f^{(n+1)}(0) \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0 \\
&= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).}$$

c)
- Soit $x \in [0, R[$. En appliquant la question 1c avec $b = 0$ et $a = x$, nous obtenons

  $$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x) \frac{(0-x)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Par encadrement, et d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on en déduit que

  $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Soit $x \in \left]-R, 0\right]$. En appliquant la question 1c avec $b = x$ et $a = 0$, nous obtenons

  $$\frac{-x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(0) \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Par encadrement, et d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on en déduit que

  $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous en déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-R, R\right[,\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x).}$ Ainsi les fonctions AM sur $I = \left]-R, R\right[$ sont développables en série entière au voisinage de 0.