Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 8

samedi 14 avril 2018

La durée de l'épreuve est de quatre heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Apéritif

1) Écrire une instruction en Scilab (et une seule) qui simule le nombre de 5 obtenus en lançant 100 fois un dé équilibré à six faces.
2) a) Écrire une fonction en Scilab appelée `ApproxLog.sci` qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n et qui calcule la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$.

   b) Écrire des instructions en Scilab qui tracent la courbe de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ en rouge et lui superposent la courbe de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ sur $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ en bleu.

Exercice 1 : Endomorphisme annulé par un polynôme de degré 2

Partie A : Un exemple

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Considérons $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \big(ax+(b-a)y, by, (a-b)y+az\big)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Supposons que $a \neq b$.
   a) Déterminer une base de $E_a = \operatorname{Ker}(f - a\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $E_b = \operatorname{Ker}(f - b\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   b) En déduire que $E_a \oplus E_b = \mathbb{R}^3$.
   c) Expliciter la projection vectorielle sur E_a (resp. E_b) parallèlement à E_b (resp. E_a).
3) Vérifier que $f^2 = (a+b)f - ab\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et conclure que $P(f) = 0$ avec $P = (X-a)(X-b)$.

Partie B : Le cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque non réduit à $\{0_E\}$. On se donne $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $b \neq a$ et on considère f un endomorphisme de E vérifiant $(f - a\operatorname{Id}_E)\circ(f - b\operatorname{Id}_E) = 0_E$. On suppose de plus que $f \neq a\operatorname{Id}_E$ et $f \neq b\operatorname{Id}_E$.

1) Montrer que $p = \dfrac{f - a\operatorname{Id}_E}{b-a}$ et $q = \dfrac{f - b\operatorname{Id}_E}{a-b}$ sont des projecteurs vérifiant $p\circ q = q \circ p = 0$.
2) Posons $E_a = \operatorname{Ker}(f - a\operatorname{Id}_E)$ et $E_b = \operatorname{Ker}(f - b\operatorname{Id}_E)$. Montrer que $E_a \oplus E_b = E$.
3) Pour quelle condition sur a et b, l'application f est-elle un automorphisme ? Expliciter f^{-1} en fonction de f dans ce cas.
4) a) Écrire f en fonction de p et q.

   b) En déduire f^n en fonction de p et q, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in]0,1[$. Un joueur dispose de deux jetons J1 et J2.

- Le jeton J1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. La probabilité qu'il tombe sur 1 est p.
- Le jeton J2 possède deux faces numérotées 1.

Le joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On note :

- E l'événement « le jeton J1 est choisi pour le jeu »,
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k l'événement « le $k^{\text{ième}}$ lancer fait apparaître une face numérotée 1 »

On suppose que cette expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Partie A : Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

   b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X (resp. Y) égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 (resp. 1) et on pose $X = 0$ (resp. $Y = 0$) si la face portant le numéro 0 (resp. 1) n'apparaît jamais. On admet que ces variables aléatoires sont bien définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2) a) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{(1-p)p^{n-1}}{2}$.

   b) En déduire $P(X = 0)$. Ce résultat était-il prévisible ?

   c) Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer son espérance et sa variance.

3) a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.

   b) Calculer la probabilité $P(Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

   c) En déduire $P(Y = 0)$.

Partie B : Simulation des variables aléatoires X et Y

1) Recopier et compléter le programme Scilab suivant sur votre copie afin qu'il simule l'expérience de l'exercice et renvoie le rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 (c'est-à-dire une réalisation de la variable aléatoire X).

```
p=input('Entrez un réel p compris entre 0 et 1 strictement :')
J=[          ]//J contient 1 avec probabilité 1/2 et 2 avec probabilité 1/2
if [      ]    then
       bloc_instructions1
else
       bloc_instructions2
end
disp(X)
```

   Le bloc d'instruction `bloc_instructions1` (resp. `bloc_instructions2`) devra affecter une valeur à la variable `X` dans le cas de figure où le jeton J1 (resp. J2) a été choisi.

2) En s'inspirant de la question précédente, écrire un **fonction** Scilab appelée `SimulY.sci` qui prend en entrée le paramètre `p`, simule l'expérience de l'exercice et renvoie le rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 (c'est-à-dire une réalisation de la variable aléatoire Y) stocké dans la variable `Y`.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. On dit qu'une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est absolument monotone (AM en abrégé) si f est de classe C^∞ sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A : Exemples et premières propriétés des fonctions AM

1) Soient f et g deux fonctions AM. Montrer que $f+g$ et fg sont AM. L'ensemble des fonctions AM est-il un espace vectoriel ?

2) Montrer que $\exp$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sont AM sur des intervalles à préciser.

3) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

   b) En déduire que $\tan$ est AM sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Développement en série entière des fonctions AM

Soit f une fonction AM sur un intervalle $I =]-R, R[$ pour un certain $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Le but de cette partie est de montrer que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

On dit alors que f est développable en série entière au voisinage de 0.

1) Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b < R$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \leqslant f(b)$.

   b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ converge et que sa somme est majorée par $f(b)$.

   c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = 0$.

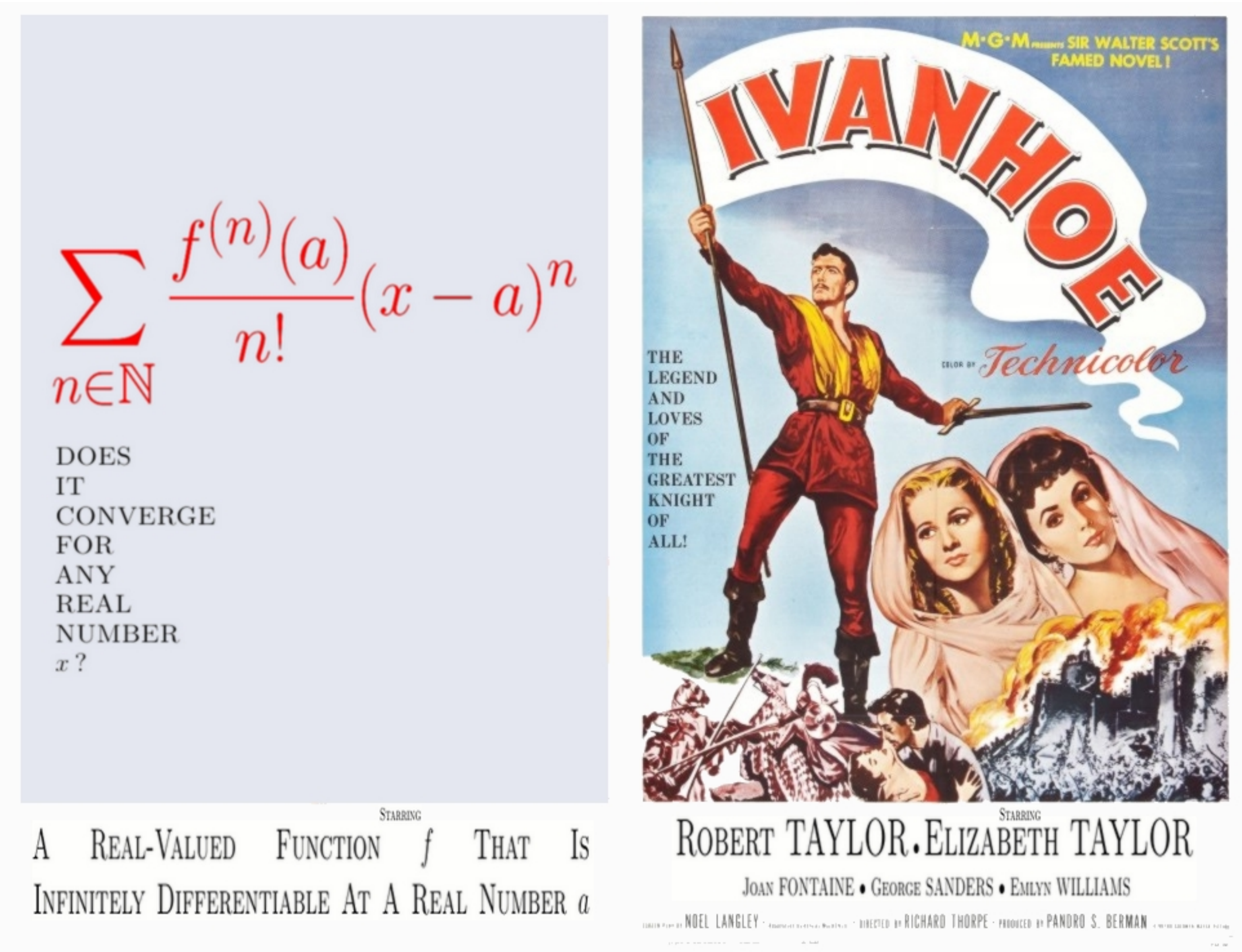
2) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, R[$. Montrer que

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x).$$

   b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R, 0]$. Montrer que

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

   c) En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$. Conclure.



Préférez-vous les séries de Taylor ou les films de Taylor ?