Correction du DS 007

samedi 17 mars 2018

Exercice 1 : Questions en vrac

1) a) Une tribu de Ω est un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\Omega \in \mathcal{A}$ et

- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

b) Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

2) a)
- Si $|\alpha| \geqslant 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\})$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha \in \,]-1,1[$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n^2 - 3n + 5)\alpha^n = 2n(n-1)\alpha^n - n\alpha^n + 5\alpha^n$$

et on reconnait la somme de trois termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes. Ainsi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (2n^2 - 3n + 5)\alpha^n$ converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2 - 3n + 5)\alpha^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\alpha^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n \\
&= 2\alpha^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2} - \alpha\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^{n-1} + 5\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n \\
&= \frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{5}{1-\alpha} \\
&= \frac{4\alpha^2 - \alpha + \alpha^2 + 5 + 5\alpha^2 - 10\alpha}{(1-\alpha)^3} = \frac{10\alpha^2 - 11\alpha + 5}{(1-\alpha)^3}
\end{aligned}$$

b) Remarquons d'abord que $2n^2 - 3n + 5 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet le discriminant de $2X^2 - 3X + 5$ est strictement négatif). Afin que $\mathbb{P}$ soit positive et non identiquement nulle et il faut et il suffit que $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Afin que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\})$ converge il faut et il suffit que $\alpha < 1$. D'après la question précédente, $\boxed{\mathbb{P} \text{ est une probabilité si et seulement si } \alpha \in \,]0,1[\text{ et } \lambda = \dfrac{(1-\alpha)^3}{10\alpha^2 - 11\alpha + 5}}$.

3) Un bref coup d'œil nous invite à penser que le terme dominant dans cette somme est $7n^2$. Montrons que c'est le cas :

$$\frac{u_n}{7n^2} = \frac{\big(\ln(n)\big)^{10!}}{7n^{3/2}} + \frac{\mathrm{Arctan}(n!)}{7n^2} + 1 + \frac{5ne^{-n}}{7}.$$

On a

- $\dfrac{\big(\ln(n)\big)^{10!}}{7n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
- $\left|\dfrac{\mathrm{Arctan}(n!)}{7n^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{14n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement, $\dfrac{\mathrm{Arctan}(n!)}{7n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- $\dfrac{5ne^{-n}}{7} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Par conséquent $\dfrac{u_n}{7n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} 7n^2.}$

4) On a $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 = -\frac{1}{9}\frac{1}{n^{1/6}}\frac{1}{n^{2/3}}.$$

Puisque $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3} = \dfrac{1+4}{6} = \dfrac{5}{6}$, nous en déduisons que $-x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^{5/6}}$.

Puisque $\dfrac{5}{6} \leqslant 1$, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{5/6}}$ diverge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-x_n)$ diverge et enfin $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ diverge.}}$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)\right)^n$. On a

$$\ln(u_n) = n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) = n\ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)-1\right).$$

Or $\dfrac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\cos\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\ln\left(\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right)^n\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(-\frac{1}{2n^{2\gamma}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\gamma-1}}.$$

- Si $\gamma < 1/2$, alors $2\gamma - 1 < 0$ et donc $-\dfrac{1}{2n^{2\gamma-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
- Si $\gamma = 1/2$, alors $2\gamma - 1 = 0$ et donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.
- Si $\gamma > 1/2$, alors $2\gamma - 1 > 0$ et donc $-\dfrac{1}{2n^{2\gamma-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Nous en déduisons que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right)^n = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & \gamma < 1/2 \\ e^{-1/2} & \text{si} & \gamma = 1/2 \\ 1 & \text{si} & \gamma > 1/2 \end{array}\right. .}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^\alpha}.$$

Par récurrence immédiate, on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{x_n}$.

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{1+x_n^\alpha} < 1$ puisque $x_n^\alpha > 0$. Ainsi $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   b) Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^\alpha}$ est continue (puisque $\alpha > 0$), nous obtenons que $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^\alpha}$ donc $1+\ell^\alpha = 1$ et donc $\ell = 0$. Ainsi $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = -\ln(x_n)$.

   a) On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ donc $y_n = -\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il s'ensuit que la série télescopique $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} (y_{n+1}-y_n) \text{ diverge.}}$

   b) On a $y_{n+1} - y_n = \ln\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \ln(1+x_n^\alpha) \underset{+\infty}{\sim} x_n^\alpha$ puisque $x_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (y_{n+1}-y_n)$ diverge, le théorème de comparaison des séries à termes positifs entraîne que $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^\alpha \text{ diverge.}}$

3) Soit $\beta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1+x_n^\alpha}{x_n} = \dfrac{1}{x_n} + x_n^{\alpha-1} = u_n + u_n^{1-\alpha}$ donc

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(u_n + u_n^{1-\alpha}\right)^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(\left(1+u_n^{-\alpha}\right)^\beta - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} u_n^\beta\, \beta\, u_n^{-\alpha},$$

car $u_n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{\beta-\alpha}.}$

4) Donnons-nous $\varepsilon > 0$.

   a) Si on choisit $\beta = \alpha$ dans la question précédente, on obtient que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \alpha$. Par conséquent $\dfrac{u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha}{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha}{\alpha} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \qquad 1-\varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha}{\alpha} \leqslant 1+\varepsilon.}$$

   b) Soit $n \geqslant n_0 + 1$. On somme :

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (1-\varepsilon) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha}{\alpha} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} n(1+\varepsilon).$$

   On reconnait une somme télescopique dans le terme du milieu donc

$$\boxed{(n-n_0)(1-\varepsilon) \leqslant \frac{u_n^\alpha - u_{n_0}^\alpha}{\alpha} \leqslant (n-n_0)(1+\varepsilon).}$$

c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0 + 1, \qquad 1 - \varepsilon \leqslant \frac{u_n^\alpha - u_{n_0}^\alpha}{\alpha(n - n_0)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Cela signifie que $\dfrac{u_n^\alpha - u_{n_0}^\alpha}{\alpha(n - n_0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc

$$\frac{u_n^\alpha}{\alpha(n - n_0)} = \frac{u_n^\alpha - u_{n_0}^\alpha}{\alpha(n - n_0)} + \frac{u_{n_0}^\alpha}{\alpha(n - n_0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1.$$

Ainsi $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} (n - n_0)\alpha$ et donc $\boxed{u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} n\alpha}$.

De plus $x_n^\alpha = \dfrac{1}{u_n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\alpha}$ donc, comme la série harmonique diverge, le théorème de comparaison des séries à termes positif entraîne que $\boxed{\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^\alpha \text{ diverge.}}$

d) On a $x_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\alpha}$ donc $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{1/\alpha}\alpha^{1/\alpha}}}$.

5) Le théorème de comparaison des séries à termes positifs entraîne donc que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge si et seulement si la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{1/\alpha}}$ converge donc si et seulement si $\alpha < 1$.

6) a)

```
function U=SommeSerie(a,x0,n)
x=x0; s=x0; U=[s];
for  k=1:n
     x=x/(1+x∧a);
     s=s+x;
     U=[U,s];
end
endfunction
```

b)

```
clf();
subplot(1,2,1)
n=500; a=1/2;
U=SommeSerie(a,1,n);
plot(0:n,U,'*r')
legend('alpha='+string(a)+' et n='+string(n))
subplot(1,2,2)
n=100000; a=3/2;
U=SommeSerie(a,1,n);
plot(0:n,U,'*r')
legend('alpha='+string(a)+' et n='+string(n))
```

c) On constate que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger (très vite) lorsque $\alpha = 1/2$ et semble diverge lorsque $\alpha = 3/2$. C'est cohérent avec les résultats de la question 5.

Partie A : Deux joueurs s'affrontent

1) a) $\boxed{\text{Si } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } E_n = \bigcap_{k=0}^{n} \left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right).}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les tirs successifs sont indépendants,

$$\mathbb{P}(H_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(\overline{B_k}) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-p_1)(1-p_2).$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(H_n) = \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n)$, d'après la propriété de la limite monotone (en effet $H_{n+1} \subset H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Puisque $|(1-p_1)(1-p_2)| < 1$, nous obtenons que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = 0$. La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle. Nous en déduisons que $\boxed{\text{ce jeu s'arrête presque sûrement.}}$

2) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

a) $\boxed{\text{On a } E_0 = A_0. \text{ Si } n \geqslant 1, \text{ alors } E_n = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right)\right) \cap A_n.}$

b) On a $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(A_0) = p_1$. Soit $n \geqslant 1$. Puisque les tirs successifs sont indépendants, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right)\right) \cap A_n\right) &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(\overline{B_k})\right)\mathbb{P}(A_n) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-p_1)(1-p_2)\right)p_1 = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) $\boxed{\text{On a } F_0 = \overline{A_0} \cap B_0. \text{ Si } n \geqslant 1, \text{ alors } F_n = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right)\right) \cap \left(\overline{A_n} \cap B_n\right).}$

Puisque les tirs successifs sont indépendants, on a $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(\overline{A_0})\mathbb{P}(B_0) = (1-p_1)p_2$ et, si $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(F_n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(\overline{B_k})\right)\mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(B_n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-p_1)(1-p_2)\right)(1-p_1)p_2 = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2.$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(F_n) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3) On a $\boxed{G_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}$ et $\boxed{G_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$. Il s'agit d'unions dénombrables d'événements incompatibles donc, par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^n = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \boxed{\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}},$$

et

$$\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = (1-p_1)p_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^n = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \boxed{\frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}.}$$

La probabilité que le jeu s'arrête est (par incompatibilité)

$$\mathbb{P}(G_1 \cup G_2) = \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} + \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = \frac{p_1+(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1.$$

On retrouve le fait que $\boxed{\text{ce jeu s'arrête presque sûrement.}}$

4) On a $\mathbb{P}(G_1) - \mathbb{P}(G_2) = \dfrac{p_1-(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

a) On a $\mathbb{P}(G_1) > \mathbb{P}(G_2)$ si et seulement si $p_1-(1-p_1)p_2 > 0$ si et seulement si $\dfrac{p_1}{1-p_1} > p_2$. Si $p_1 \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $1-p_1 \leqslant \dfrac{1}{2} < p_1$ et donc $\dfrac{p_1}{1-p_1} \geqslant 1 > p_2$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(G_1) > \mathbb{P}(G_2).}$

b) Si $p_1 < \dfrac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(G_2) > \mathbb{P}(G_1)$ si et seulement si $p_1-(1-p_1)p_2 < 0$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(G_1) > \mathbb{P}(G_2) \text{ dès que } p_2 > \dfrac{p_1}{1-p_1}.}$

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E_n \cap \overline{G_1} = \varnothing$ car le joueur 1 ne peut pas à la fois perdre le jeu gagner au $(2n+1)^{\text{ième}}$ tir. De plus il est immédiat que les événements E_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles. Enfin $\overline{G_1} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \overline{G_1} \cup G_1 = \Omega$. Ainsi $\boxed{(\overline{G_1}, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots) \text{ est un système complet d'événement.}}$

b) Appliquons la formule des probabilité totales avec le système complet d'événements $(\overline{G_1}, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots)$ de probabilités non nulles

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(J) &= \mathbb{P}_{\overline{G_1}}(J)\mathbb{P}(\overline{G_1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_n}(J)\mathbb{P}(E_n) \\
&= 0 \times \mathbb{P}(\overline{G_1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}(1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1 \\
&= \frac{p_1}{(1-p_1)(1-p_2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{n+1} \\
&= \frac{p_1}{(1-p_1)(1-p_2)} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!}\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{j},
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(J) = \dfrac{p_1}{(1-p_1)(1-p_2)}\left(e^{(1-p_1)(1-p_2)}-1\right).}$

c) On veut calculer $\mathbb{P}_J(E_0)$. D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_J(E_0) = \frac{\mathbb{P}_{E_0}(J)\mathbb{P}(E_0)}{\mathbb{P}(J)} = \frac{\frac{1}{(0+1)!}(1-p_1)^0(1-p_2)^0 p_1}{\frac{p_1}{(1-p_1)(1-p_2)}\left(e^{(1-p_1)(1-p_2)}-1\right)} = \boxed{\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{e^{(1-p_1)(1-p_2)}-1}.}$$

Partie B : Une infinité de joueurs s'affrontent

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ (c'est le produit de termes strictement positifs) et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - p_{n+1} < 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée (par 0), le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un certain réel } \alpha.}$ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_1 = 1 - p_1 < 1$ donc $\boxed{\alpha \in [0, 1[.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n-1}p_n = u_{n-1}(p_n - 1) + u_{n-1} = -u_n + u_{n-1}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\, p_n = \sum_{n=1}^{N} (u_{n-1} - u_n) = u_0 - u_N = 1 - u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha.$$

Cela signifie que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_{n-1}\, p_n \text{ converge et que sa somme vaut est } S = 1-\alpha.}$

2) a) On a $V_1 = C_1$ donc $\mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}(C_1) = p_1 = u_0 p_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $V_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \overline{C}_k\right) \cap C_n$. Puisque les tirs sont indépendants, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(V_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{C}_k)\right) \mathbb{P}(C_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \mathbb{P}(\overline{C}_k)\right)\right) \mathbb{P}(C_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_k)\right) p_n$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(V_n) = u_{n-1} p_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

b) On a $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$ et il s'agit d'une union dénombrables d'événements incompatibles si bien que $\mathbb{P}(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} p_n$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(V) = 1 - \alpha}$.

c) Si $\mathbb{P}(V) < 1$, alors $\alpha > 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - p_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ et donc

$$\boxed{p_n = 1 - \frac{u_n}{u_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{\alpha}{\alpha} = 0.}$$

Notons que ce raisonnement n'est vrai que si $\alpha \neq 0$.

3) a) Si $p_n = p \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 et la contraposée du résultat de la question précédente entraîne alors que $\boxed{\mathbb{P}(V) = 1.}$

b) Supposons que $p_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(V) = 1 - \alpha = 1.}$

$\boxed{\text{La réciproque de la question 2c est fausse car } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ tend vers } 0}$.

c) Supposons que $p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}\,\frac{n+2}{2}.$$

Ainsi $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(V) = 1 - \alpha = \frac{1}{2}.}$

Quelques remarques générales :

- Le DS a été noté sur 31,5. Le barème approximatif est le suivant : 8/10,5/8/5. Les bonnes réponses aux questions en vrac ont été encore une fois très valorisées (les questions de cours rapportait environ 1 point) car totalement conformes à ce qu'on a vu en TD. Bien que comportant beaucoup de questions, le problème était très guidé et accessible (les questions valaient de ce fait moins de points, cependant il était tout à fait jouable d'obtenir 7 points). L'exercice était plus difficile donc les bonnes réponses valorisées.
- Contrairement aux petits o, on ne peut pas enlever les constantes dans les équivalents.
- On ne compose surtout pas à gauche dans des équivalents (sauf avec des puissances ne dépendant pas de n, si n est la variable que l'on fait tendre vers $+\infty$). Le passage à l'exponentielle fournit des contre-exemples faciles.
- Dire qu'une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0 est une erreur d'amateur qu'il faut éviter à tout prix. NON on peut simplement conclure qu'elle converge vers un réel ℓ positif et ensuite utiliser d'autres arguments pour montrer que $\ell = 0$ le cas échéant.
- Le théorème de comparaison des séries positives ne fonctionne qu'avec des séries à termes positifs (et plus généralement à termes constants à partir d'un certain rang). Avant de l'appliquer, IL FAUT DIRE QUE LES SÉRIES SONT A TERMES POSITIFS.
- Lorsqu'on applique un résultat, on cite le résultat que l'on applique (sinon on n'a pas tous les points). Quelques exemples en rapport avec le DS :
  - Si on dit « la suite est décroissante et minorée donc elle converge », on n'oublie pas de dire « d'après le théorème de la limite monotone ».
  - Si on dit « $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ », on n'oublie pas de dire « car A et B sont indépendants ».
  - Si on dit « $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ », on n'oublie pas de dire « car A et B sont incompatibles ».
  - Si on dit « $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ », on n'oublie pas de dire « d'après la propriété de la limite monotone ».
- Les règles de calcul de puissances ne sont pas maitrisés par tous. C'est un gros problème car c'est la base de la base et ça donne une vision très négative du candidat : $x^a x^b = x^{a+b}$ et non x^{ab}.
- L'erreur classique « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ » a encore eu lieu massivement (cf. question en vrac n° 5)... c'est inadmissible.
- Les questions Scilab ont été catastrophiques ! Il faut revoir d'urgence la notion de fonction Scilab (pas de `input,disp`, première ligne : `function sorties=f(entrées)`, etc.) et les graphiques (on utilise `linspace` lorsque l'on veut tracer une fonction de la variable réelle, mais ici on voulait tracer les premiers termes d'une suite). Vous étiez pourtant prévenus.... Il y avait 3,5 points à prendre, dommage !
- Dans la question A1c du problème, il fallait utiliser la propriété de la limite monotone pour que ce soit rigoureux. Apprenez absolument à rédiger un tel argument. C'est classique et ce n'est pas bien compliqué.
- Attention à ne pas confondre les propriétés de la somme et du produit qui sont bien différentes (cf. question B1a du problème).
- Seuls 6 élèves ont su appliquer correctement la formule des probabilités totales de la question A5b du problème. C'est vraiment dommage car la question précédente vous mettez sur la piste. Il va vraiment falloir apprendre à appliquer cette formule un jour ou l'autre si vous voulez réussir les concours (très usuel).
- L'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\overline{A_n} \cap \overline{B_n})$ ne dépend pas de n....