Devoir surveillé *007*

samedi 17 mars 2018

La durée de l'épreuve est de quatre heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Questions de cours.** Soit Ω un ensemble non vide quelconque.
   a) Donner la définition d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.
   b) Donner la définition d'une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

2) a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(2n^2-3n+5)\alpha^n$ lorsqu'elle converge.
   b) En déduire les couples $(\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'application $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \lambda(2n^2-3n+5)\alpha^n$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

3) Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}\left(\ln(n)\right)^{10!} + \operatorname{Arctan}(n!) + 7n^2 + 5n^3e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = 1 - \sqrt[9]{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}.$$

5) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right)^n$ en fonction de $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : Recherche d'équivalent d'une suite récurrente

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^\alpha}.$$

Par récurrence immédiate, on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = -\ln(x_n)$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (y_{n+1} - y_n)$ diverge.

b) Déterminer un équivalent de $y_{n+1} - y_n$ en fonction de x_n lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^\alpha$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{x_n}$. Soit $\beta > 0$. Montrer que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{\beta-\alpha}$.

4) Donnons-nous $\varepsilon > 0$.

a) Déduire de la question précédente qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 1 - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha}{\alpha} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

b) En déduire que

$$\forall n \geqslant n_0 + 1, \qquad (n - n_0)(1 - \varepsilon) \leqslant \frac{u_n^\alpha - u_{n_0}^\alpha}{\alpha} \leqslant (n - n_0)(1 + \varepsilon).$$

c) Montrer que $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} n\alpha$ et retrouver le résultat de la question 2b.

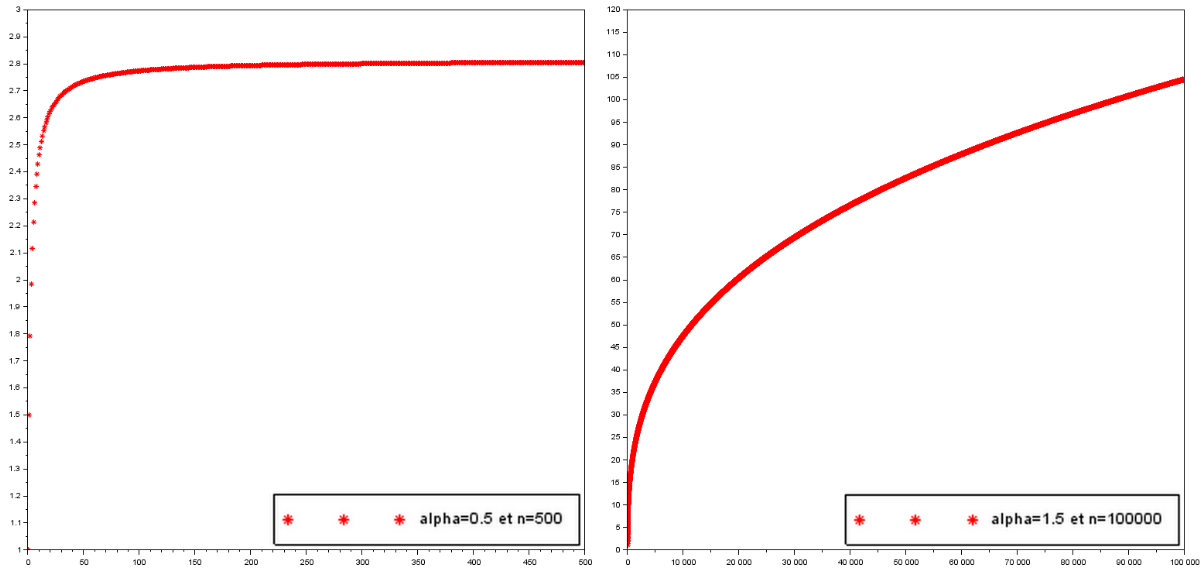
d) Déterminer enfin un équivalent de x_n en $+\infty$.

5) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ en fonction de α.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

a) Écrire une fonction en Scilab, appelée `SommeSerie`, qui prend en entrée α, x_0 et n et qui renvoie un vecteur contenant $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

b) Écrire un programme qui affiche la fenêtre graphique ci-dessous. Il s'agit de la représentation graphique de $S_0, S_1, \ldots, S_n$ lorsque $\alpha = 1/2$ et $n = 500$ (à gauche) et lorsque $\alpha = 3/2$ et $n = 100000$ (à droite).
On utilisera la commande subplot. La valeur de x_0 utilisée est 1.



c) Commenter les résultats.

Partie A : Deux joueurs s'affrontent

Deux joueurs essayent d'atteindre une cible. A chaque essai, le joueur 1 (resp. le joueur 2) a une probabilité $p_1 \in]0,1[$ (resp. $p_2 \in]0,1[$) de toucher la cible. Les joueurs s'affrontent tour à tour (de façon alternée) jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait touché la cible et gagne ainsi le jeu. Le joueur 1 commence. On suppose que chaque tir est indépendant.

On suppose que cette expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Notons G_1 (resp. G_2) l'événement « Le joueur 1 (resp. 2) l'emporte ». On remarque que le joueur 1 tire aux essais impairs et le joueur 2 aux essais pairs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

- A_n l'événement « Le joueur 1 touche la cible au $(2n+1)^{\text{ème}}$ tir »,
- B_n l'événement « Le joueur 2 touche la cible au $(2n+2)^{\text{ème}}$ tir »,
  On définit ces deux derniers événements indépendamment de ce qui s'est passé aux tirs précédents (et ce même si le jeu s'est déjà arrêté).
- E_n l'événement « Le joueur 1 l'emporte à l'issue du $(2n+1)^{\text{ième}}$ tir »,
- F_n l'événement « Le joueur 2 l'emporte à l'issue du $(2n+2)^{\text{ième}}$ tir »,
- H_n l'événement « Le jeu n'est toujours pas terminé à l'issue du $(2n+2)^{\text{ième}}$ tir ».

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer H_n en fonction des événements $A_0, \dots, A_n$ et $B_0, \dots, B_n$.

   b) En déduire $\mathbb{P}(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Est-ce que ce jeu s'arrête presque sûrement ?

2) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

   a) Exprimer E_n en fonction des événements $A_0, \dots, A_0$ et $B_0, \dots, B_n$.

   b) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$.

   c) Exprimer F_n en fonction des événements $A_0, \dots, A_n$ et $B_0, \dots, B_n$. En déduire une expression de $\mathbb{P}(F_n)$.

3) Exprimer G_1 (resp. G_2) en fonction des événements E_n (resp. F_n), $n \in \mathbb{N}$, et montrer

$$\mathbb{P}(G_1) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(G_2) = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

   En déduire (à nouveau) la probabilité que le jeu s'arrête presque sûrement.

4) a) Montrer que, si $p_1 \geqslant \frac{1}{2}$, alors le jeu est favorable au joueur 1 (c'est-à-dire $\mathbb{P}(G_1) > \mathbb{P}(G_2)$).

   b) Supposons que $p_1 \leqslant \frac{1}{2}$ est fixé. A partir de quelle valeur de p_2 le jeu est-il favorable au joueur 2 (c'est-à-dire $\mathbb{P}(G_2) > \mathbb{P}(G_1)$) ?

5) Ce jeu est organisé tous les ans. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que le joueur 1 l'emporte à l'issue du $(2n+1)^{\text{ième}}$ tir, l'organisateur acceptera qu'il rejoue l'an prochain avec probabilité $\dfrac{1}{(n+1)!}$. Bien sûr si le joueur 1 perd, il n'aura pas sa chance l'an prochain.

   a) Justifier que $(\overline{G_1}, E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots)$ est un système complet d'événement.

b) Notons J l'événement « le joueur 1 jouera l'an prochain ». Calculer $\mathbb{P}(J)$.
On l'exprimera en fonction de p_1 et p_2.

c) Le joueur a finalement été invité à participer au jeu l'an prochain. Quelle est la probabilité qu'il ait gagné dès le premier tir ?

Partie B : Une infinité de joueurs s'affrontent

On suppose désormais qu'une infinité de joueurs se succèdent. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ième}}$ joueur a une probabilité $p_n \in]0,1[$ de toucher la cible. On suppose que les tirs sont indépendants et que chaque joueur ne joue qu'une seule fois.

1) Posons $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$.

   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel $\alpha \in [0,1[$.

   b) A l'aide d'une série télescopique, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_{n-1}\, p_n$ converge et que sa somme vaut est $S = 1-\alpha$.

2) Notons V l'événement « L'un des joueurs l'emporte ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons
   - C_n l'événement « Le joueur n touche la cible »,
   - V_n l'événement « Le joueur n l'emporte ».

   a) Exprimer V_n en fonction des événements $C_1, \dots, C_n$. En déduire $\mathbb{P}(V_n)$.

   b) Exprimer $\mathbb{P}(V)$ en fonction de α.

   c) Montrer que, si $\mathbb{P}(V) < 1$, alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) a) Calculer $\mathbb{P}(V)$ lorsque $p_n = p \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Calculer $\mathbb{P}(V)$ lorsque $p_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la réciproque de la question 2c ?

   c) Calculer $\mathbb{P}(V)$ lorsque $p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.