Correction du DS n° 6

Exercice 1 : Questions en vrac

1) $\boxed{\text{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \text{ possède au moins une racine complexe}}$.

2) Soient P et Q deux polynômes.
   - *Méthode 1 :* Si on montre que P et Q ont les mêmes coefficients, alors $P = Q$.
   - *Méthode 2 :* Si on montre que $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et si $P - Q$ admet $n + 1$ racines distinctes, alors $P = Q$.
   - *Méthode 2 (bis) :* Si on montre que le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, alors $P = Q$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $X^5 + 1$. On a alors $z^5 = -1$ donc $|z| = 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a $e^{5i\theta} = z^5 = -1 = e^{i\pi}$ d'après la formule de Moivre. Nous en déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5\theta = \pi + 2k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{5}$. Puisque $e^{(2(k+2\ell\pi)+1)i\pi/5} = e^{(2k+1)i\pi/5}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, nous en déduisons que
$$z \in \{-1, e^{-i\pi/5}, e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{-3i\pi/5}\}.$$
Réciproquement ces cinq complexes sont bien racines de $X^5 + 1$. Ainsi $X^5 + 1$ admet exactement 5 racines et on en déduit la factorisation :
$$\boxed{X^5 + 1 = (X+1)(X - e^{-i\pi/5})(X - e^{i\pi/5})(X - e^{-3i\pi/5})(X - e^{3i\pi/5}).}$$
Ensuite on regroupe les racines non réelles avec leur conjugué :
$$X^5 + 1 = (X+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X + 1\right).$$
Or on a
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 1 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 1 - 5 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\boxed{X^5 + 1 = (X+1)\left(X^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right)\left(X^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right).}$$

4) a) On a $P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$. Ainsi 1 est racine de P. Effectuons la division euclidienne de P par $X - 1$:
$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & -\ 3X^2 & +\ 4X & -\ 2 & X - 1 \\ \cline{5-5} -\ (X^3 & -\ X^2) & & & X^2 - 2X + 2 \\ \cline{1-4} & -\ 2X^2 & +\ 4X & -\ 2 & \\ & -\ (-2X^2 & +\ 2X) & & \\ \cline{2-4} & & 2X & -\ 2 & \\ & & -\ (2X & -\ 2) & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$
Ainsi $\boxed{P = (X-1)(X^2 - 2X + 2) \text{ dans } \mathbb{R}[X]}$. Il s'agit bien de la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le polynôme $X^2 - 2X + 2$ admet pour discriminant $-4 < 0$.

Mais $X^2 - 2X + 2$ admet deux racines complexes : $\dfrac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i$ et $\dfrac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i$. Ainsi $\boxed{P = (X-1)(X-1-i)(X-1+i) \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$.

b) Notons $\alpha = 1+i$. On a $(1+i)^2 = 2i$. Ainsi $(1+i)^{2018} = (2i)^{1009} = 2^{1009}\, i^{4\cdot 252+1} = 2^k\, i$, avec $\boxed{k = 1009}$.

c) *Première méthode :* Le théorème de la division euclidienne nous assure qu'il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^{2018} = QP + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$. Ainsi $\deg(R) \leqslant 2$ et il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$.

- On a $1 = 1^{2018} = Q(1)P(1) + R(1) = 0 + a + b + c$.
- On a $2^k\, i = (1+i)^{2018} = Q(1+i)P(1+i) + R(1+i) = 0 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 2ia + (1+i)b + c$.
  Prenons la partie réelle : $b + c = 0$.
  Prenons la partie imaginaire : $2^k = 2a + b$.

On en déduit que $b = -c$ donc $a = a+b+c = 1$ puis $b = 2^k - 2a = 2^k - 2$ et enfin $c = 2 - 2^k$. Nous en déduisons que le reste de la division euclidienne de X^{2018} par P est $\boxed{R = X^2 + (2^k - 2)X + 2 - 2^k}$.

Deuxième méthode : Le théorème de la division euclidienne nous assure qu'il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^{2018} = QP + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$. Ainsi $\deg(R) \leqslant 2$ et il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$.

- On a $1 = 1^{2018} = Q(1)P(1) + R(1) = 0 + a + b + c$.
- On a $2^k\, i = (1+i)^{2018} = Q(1+i)P(1+i) + R(1+i) = 0 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 2ia + (1+i)b + c$.
- On a $-2^k\, i = (1-i)^{2018} = Q(1-i)P(1-i) + R(1-i) = 0 + a(1-i)^2 + b(1-i) + c$ donc $-2^k\, i = -2ia + (1-i)b + c$.

Nous en déduisons que a, b et c sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2ia & + & (1+i)b & + & c & = & 2^k\, i \\ -2ia & + & (1-i)b & + & c & = & -2^k\, i \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & + & c & = & 1 & \\ & & (1-i)b & + & (1-2i)c & = & (2^k-2)i & L_2 \leftarrow L_2 - 2iL_1 \\ & & (1+i)b & + & (1+2i)c & = & -(2^k-2)i & L_3 \leftarrow L_3 + 2iL_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & + & c & = & 1 & \\ & & (1-i)b & + & (1-2i)c & = & (2^k-2)i & \\ & & & & 2ic & = & -2(2^k-2)i & L_3 \leftarrow (1-i)L_3 - (1+i)L_2 \end{array}\right.$$

Ainsi $c = 2 - 2^k$ puis $b = \dfrac{(2^k-2)i - (1-2i)c}{1-i} = 2^k - 2$ et enfin $a = 1 - b - c = 1$. Nous en déduisons que le reste de la division euclidienne de X^{2018} par P est $\boxed{R = X^2 + (2^k - 2)X + 2 - 2^k}$.

5) a) Déjà on a $0 + 2\cdot 0 = 0 - 4\cdot 0$ et $0 + 3\cdot 0 = 5\cdot 0$ donc $(0,0,0,0) \in F$. Ensuite donnons-nous $(x,y,z,t) \in F$, $(x',y',z',t') \in F$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x,y,z,t) + \mu(x',y',z',t') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

et

- $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') = \lambda(x+2y) + \mu(x'+2y') = \lambda(z-4t) + \mu(z'-4t') = (\lambda z + \mu z') - 4(\lambda t + \mu t')$,
- $(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda t + \mu t') = \lambda(y+3t) + \mu(y'+3t') = \lambda(5z) + \mu(5z') = 5(\lambda z + \mu z')$.

Ainsi $\lambda(x,y,z,t) + \mu(x',y',z',t') \in F$ et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(x,y,z,t) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & = & z & - & 4t \\ & & y & = & 5z & - & 3t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & = & -9z & + & 2t & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ y & = & 5z & - & 3t & \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z,t) = z(-9,5,1,0) + t(2,-3,0,1)$$

Ainsi la famille $\big((-9,5,1,0),(2,-3,0,1)\big)$ est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre : donnons-nous $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(-9,5,1,0)+\beta(2,-3,0,1)=(0,0,0,0)$. En regardant la troisième (resp. quatrième) coordonnée, on obtient $\alpha=0$ (resp. $\beta=0$). Ainsi la famille est libre.

Ainsi $\boxed{\big((-9,5,1,0),(2,-3,0,1)\big) \text{ est une base de } F}$.

Exercice 2 : Étude d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}_n=\big\{a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n \,|\, (a,b)\in\mathbb{R}^2\big\}$, où J_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) a) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. On a $(J_n^2)_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(J_n)_{i,k}(J_n)_{k,j}=\sum_{k=1^n}1=n$. Ainsi $\boxed{J_n^2=nJ_n}$.

b) Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $J_n^1=\gamma_1 J_n$ avec $\gamma_1=1$.
- *Hérédité.* Supposons que, pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $\gamma_k\in\mathbb{R}$ tel que $J_n^k=\gamma_k\,J_n$. On a alors $J_n^{k+1}=J_n^kJ_n=\gamma_kJ_n^2=\gamma_{k+1}J_n$, avec $\gamma_{k+1}=n\gamma_k$. Ainsi la propriété est vraie au rang $k+1$.

$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence}}$. Au passage on a aussi montré que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison n et de terme initial 1 si bien que, $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \gamma_k=n^{k-1}}$.

2) a) On a $\mathcal{E}_n=\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n,\mathrm{J}_n)$ donc il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La famille $(\mathrm{I}_n,\mathrm{J}_n)$ engendre $\mathcal{E}_n$ par définition. Montrons qu'elle est libre. Donnons-nous $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\mathrm{I}_n+\mu\mathrm{J}_n=\mathrm{O}_n$. Le coefficient d'indice $(1,1)$ de $\lambda\mathrm{I}_n+\mu\mathrm{J}_n$ est donc $\lambda+\mu=0$. Le coefficient d'indice $(2,1)$ de $\lambda\mathrm{I}_n+\mu\mathrm{J}_n$ est donc $\mu=0$. Nous en déduisons alors que $\lambda=\mu=0$ et donc la famille est bien libre.
Ainsi $\boxed{\mathcal{B}_n=(\mathrm{I}_n,\mathrm{J}_n) \text{ est une base de } \mathcal{E}_n}$.

b) Si $k=0$, alors $J_n^k=\mathrm{I}_n$ et donc $\boxed{\text{les coordonnées de } J_n^0 \text{ dans } \mathcal{B}_n \text{ sont } (1,0)}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $J_n^k=n^{k-1}J_n$ donc $\boxed{\text{les coordonnées de } J_n^k \text{ dans } \mathcal{B}_n \text{ sont } (0,n^{k-1})}$.

c) Pour tout $(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $J_n^k=n^{k-1}J_n=n^{k-\ell}J_n^\ell$. Ainsi $\boxed{\text{la famille } (J_n^k,J_n^\ell) \text{ est liée}}$.

d) Soient $A=a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n\in\mathcal{E}_n$ et $B=x\mathrm{I}_n+y\mathrm{J}_n$. On a

$$AB=(a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n)(x\mathrm{I}_n+y\mathrm{J}_n)=ax\mathrm{I}_n\mathrm{I}_n+bx\mathrm{J}_n\mathrm{I}_n+ay\mathrm{I}_n\mathrm{J}_n+by\mathrm{J}_n\mathrm{J}_n=ax\mathrm{I}_n+(bx+ay+nby)\mathrm{J}_n.$$

Ainsi $\boxed{AB\in\mathcal{E}_n \text{ et ses coordonnées dans la base } \mathcal{B}_n \text{ sont } (ax,ay+bx+nby)}$.

e) Soient $A=a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n\in\mathcal{E}_n$ et $B=x\mathrm{I}_n+y\mathrm{J}_n$. On a

$$BA=(x\mathrm{I}_n+y\mathrm{J}_n)(a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n)=ax\mathrm{I}_n+(bx+ay+nby)\mathrm{J}_n=AB.$$

Ainsi $\boxed{\text{deux éléments quelconque de } \mathcal{E}_n \text{ commutent}}$.

3) Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $M=a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n\in\mathcal{E}_n$. Puisque $a\mathrm{I}_n$ et $b\mathrm{J}_n$ commutent, la formule du binôme de Newton entraîne que

$$M^k=(a\mathrm{I}_n+b\mathrm{J}_n)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(a\mathrm{I}_n)^{k-j}(b\mathrm{J}_n)^j=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j\mathrm{J}_n^j.$$

On a $J_n^0=\mathrm{I}_n$ et, pour tout $j\in[\![1,k]\!]$, $\mathrm{J}_n^j=n^{j-1}J_n$. Ainsi

$$M^k=a^k\mathrm{I}_n+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^jn^j\mathrm{J}_n=a^n\mathrm{I}_n+\frac{1}{n}\left(-a^n+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}(nb)^j\right)\mathrm{J}_n.$$

La formule du binôme de Newton entraîne alors que

$$\boxed{M^k=a^k\mathrm{I}_n+\frac{1}{n}\big((a+nb)^k-a^k\big)\mathrm{J}_n\in\mathcal{E}_n.}$$

Ses coordonnées dans $\mathcal{B}_n$ sont $\left(a^k,\dfrac{1}{n}\left((a+nb)^k-a^k\right)\right)$.

4) Soit $M = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$.

a) Si $a = 0$, alors $M = b\mathrm{J}_n$. Si $b = 0$, alors $M = \mathrm{O}_n$ n'est pas inversible. Supposons que $b \neq 0$. Raisonnons-par l'absurde et supposons que M est inversible. Il s'ensuit que J_n est inversible. Puisque $\mathrm{J}_n^2 = n\mathrm{J}_n$, on a alors $\mathrm{J}_n = \mathrm{J}_n^{-1}\mathrm{J}_n^2 = \mathrm{J}_n^{-1} n\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

b) Supposons que $a = -nb$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(MU_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{i,k}(U_n)_k = \sum_{k=1}^{n} (M)_{i,k} = (M)_{i,i} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (M)_{i,k} = a + b + (n-1)b = a + nb = 0.$$

Ainsi $MU_n = \mathrm{O}_{n,1}$ et, comme $U_n \neq \mathrm{O}_{n,1}$, le critère du noyau est mis en défaut : $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

c) Supposons que $a \notin \{0, -nb\}$. On cherche $B = x\mathrm{I}_n + y\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$ tel que $MB = \mathrm{I}_n$. On a, d'après la question 2d,

$$MB = ax\mathrm{I}_n + (bx + ay + nby)\mathrm{J}_n.$$

Puisque $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n)$ est une base, on a unicité des coordonnée de MB si bien que $MB = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $ax = 1$ et $bx + (a+nb)y = bx + ay + nby = 0$. Puisque $a \notin \{0, -nb\}$, on obtient finalement que $MB = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{a}$ et $y = -\dfrac{b}{a(a+nb)}$.

Nous en déduisons que $\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et que } M^{-1} = \dfrac{1}{a}\mathrm{I}_n - \dfrac{b}{a(a+nb)}\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n}$.

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}_n$, on a

$$M^k = \mathrm{I}_n \iff \begin{cases} a^k = 1 \\ (a+nb)^k - a^k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^k = 1 \\ (a+nb)^k = 1 \end{cases}$$

- Si k est impair, alors

$$M^k = \mathrm{I}_n \iff \begin{cases} a = 1 \\ a + nb = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{M^k = \mathrm{I}_n \text{ si et seulement si } M = \mathrm{I}_n}$.

- Si k est pair, alors

$$\begin{aligned} M^k = \mathrm{I}_n &\iff \begin{cases} a = 1 \\ a + nb = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ a + nb = -1 \end{cases} \\ &\qquad \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ a + nb = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ a + nb = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{2}{n} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{2}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{M^k = \mathrm{I}_n \text{ si et seulement si } M \in \left\{\mathrm{I}_n, -\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n - \dfrac{2}{n}\mathrm{I}_n, -\mathrm{I}_n + \dfrac{2}{n}\mathrm{I}_n\right\}}$.

6) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} X_n = M(\lambda)X_k,$$

avec $\boxed{M(\lambda) = (1-3\lambda)\mathrm{I}_3 + \lambda\mathrm{J}_3.}$

b) Montrons par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ M_k = M(\lambda)^k X_0}$.

- *Initialisation.* On a $X_1 = M(\lambda)X_0 = M(\lambda)^1 X_0$.
- *Hérédité.* Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, $M_k = M(\lambda)^k X_0$. On a alors $X_{k+1} = M(\lambda)X_k = M(\lambda)M(\lambda)^k X_0 = M(\lambda)^{k+1}X_0$. Ainsi la propriété est vraie au rang $k+1$.

D'où le résultat par récurrence.

c) Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
X_k &= \left((1-3\lambda)^k \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}\big((1-3\lambda+3\lambda)^k - (1-3\lambda)^k\big)\mathrm{J}_3\right) X_0 \\
&= (1-3\lambda)^k X_0 + \frac{1}{3}\big(1-(1-3\lambda)^k\big)\mathrm{J}_3 X_0 \\
&= \begin{pmatrix} u_0(1-3\lambda)^k + \frac{1}{3}\big(1-(1-3\lambda)^k\big)(u_0+v_0+w_0) \\ v_0(1-3\lambda)^k + \frac{1}{3}\big(1-(1-3\lambda)^k\big)(u_0+v_0+w_0) \\ w_0(1-3\lambda)^k + \frac{1}{3}\big(1-(1-3\lambda)^k\big)(u_0+v_0+w_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_0+v_0+w_0}{3} + \frac{1}{3}(1-3\lambda)^k(2u_0-v_0-w_0) \\ \frac{u_0+v_0+w_0}{3} + \frac{1}{3}(1-3\lambda)^k(-u_0+2v_0-w_0) \\ \frac{u_0+v_0+w_0}{3} + \frac{1}{3}(1-3\lambda)^k(-u_0-v_0+2w_0) \end{pmatrix}}$$

d) Remarquons que $-1 < 1-3\lambda \leqslant 1$ si et seulement si $0 \leqslant \lambda < \frac{2}{3}$. On en déduit que

- $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $2u_0 = v_0 + w_0$ ou $0 \leqslant \lambda < \frac{2}{3}$.
- $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $2v_0 = u_0 + w_0$ ou $0 \leqslant \lambda < \frac{2}{3}$.
- $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $2w_0 = u_0 + v_0$ ou $0 \leqslant \lambda < \frac{2}{3}$.

Problème : Inversibilité de la matrice de Hilbert

Partie A : Cas où $n = 2$ ou $n = 3$

1) Si $n = 2$, alors $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On a $\Delta = 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \neq 0$. Ainsi H est inversible et

$$H^{-1} = 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = H^{-1}}.$$

2) Si $n = 3$, alors $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. donc $60H = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Effectuons la méthode de Gauss-Jordan :

$$(H|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 16 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2$$

A ce stade, on remarque que la diagonale est constituée de réels non nuls. Ainsi $60H$ est inversible. Continuons le pivot de Gauss. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 30 & 0 & -9 & 60 & -60 \\ 0 & 10 & 0 & -6 & 32 & -30 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 10L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 10 & 0 & -6 & 32 & -30 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 60 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 60 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 6L_2 \\ L_3 \leftarrow 30L_3 \end{array}$$

Ainsi $(60H)^{-1} = \dfrac{1}{60}\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}}$ puisque $H^{-1} = 60 \cdot (60H)^{-1}$.

Partie B : Cas général

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.

1) $\boxed{\text{On doit montrer que } x_1 = \cdots = x_n = 0}$ pour en déduire que $X = \mathrm{O}_{n,1}$ et conclure, avec le critère des noyaux, que H est inversible.

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La $i^{\text{ième}}$ ligne du système d'équations correspondant à l'équation $HX = \mathrm{O}_{n,1}$ est $(HX)_i = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{0 = \sum_{j=1}^{n} h_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{i+j-1}.}$$

3)
   a) Soient $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On a $L_j(i) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} (i+k) = \frac{1}{i+j}\prod_{i=0}^{n-1}(i+k) = \frac{1}{i+j}\prod_{\ell=i}^{i+n-1} \ell$ donc $\boxed{L_j(i) = \dfrac{(i+n-1)!}{(i-1)!(i+j)}}$.

   b) Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(L_j) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} \deg(X+k) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} 1 = n-1.$

   Or $\deg(P) \leqslant \displaystyle\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \big(\deg(x_j L_{j-1})\big)$ donc $\boxed{\deg(P) \leqslant n-1}$.

   c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $P(i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j L_{j-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!(i+j-1)} = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j-1}$ donc $\boxed{P(i) = 0}$.

   Le polynôme P possède donc n racines distinctes (les entiers $1, 2, \ldots, n$) et son degré est inférieur ou égal à $n-1$. Nous en déduisons que $\boxed{P \text{ est le polynôme nul}}$.

d) *Il y avait une petite erreur d'énoncé...*
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a $L_{i-1}(-i+1) = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq i-1}} (-i+1+k) \neq 0$ et, si $i \neq j$, $L_{j-1}(-i+1) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ P(-i) = L_{i-1}(-i+1)\, x_{i+1}}$.

e) Puisque P est le polynôme nul, on obtient que $\boxed{x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ et donc } H \text{ est inversible}}$.

Partie C : Calcul des la somme des coefficient de H^{-1} (BONUS)

1) • Si $n = 2$, on calcule que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 4 - 6 - 6 + 12 = 4$ soit $\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 2^2}$.

• Si $n = 3$, on calcule que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 9 - 36 + 30 - 36 + 192 - 180 + 30 - 180 + 180 = 9$ soit $\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 3^2}$.

2) On a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_i = (H^{-1}U)_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}(U)_j = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}$. En sommant, on obtient

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}.}$$

3) a) Puisque, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(L_j) = n - 1$, on a $\deg(S) \leqslant n - 1$.
Par ailleurs $\deg\left(\prod_{k=0}^{n-1} (X+k)\right) = n$ donc $\boxed{\deg(Q) = n}$. Enfin le coefficient dominant de Q est celui de $-\prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$, c'est-à-dire $\boxed{-1}$.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme dans la partie précédente, on a

$$S(i) = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{i+j-1} = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}(HY)_i = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}(U)_i = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} = \prod_{k=0}^{n-1}(i+k).$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ Q(i) = S(i) - \prod_{k=0}^{n-1}(i+k) = 0}$.

c) Puisque Q est de degré n, unitaire et admet $1, 2, \ldots, n$ pour racines, on en déduit que $\boxed{Q = -\prod_{i=1}^{n}(X-i)}$.

4) a) Le coefficient d'indice $n-1$ de $\prod_{k=0}^{n-1}(X+k) - \prod_{k=1}^{n}(X-k)$ est égal à

$$\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n}(-k) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \boxed{n^2}.$$

b) Le coefficient d'indice $n-1$ de S est $\sum_{j=1}^{n} y_j$ puisque, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, L_j est unitaire de degré $n-1$. Par ailleurs

$$S = Q + \prod_{k=0}^{n-1}(X+k) = -\prod_{k=1}^{n}(X-k) + \prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$$

donc, la question précédente entraîne que $\boxed{\sum_{j=1}^{n} y_j = n^2}$, d'où le résultat attendu.

Quelques remarques générales :

- Le DS a été noté sur 36. Le barème approximatif est le suivant : 9/13,5/13,5.
- Dans le théorème de D'Alembert-Gauss il ne faut surtout pas oublier de préciser que les racines sont complexes et que le polynôme n'est pas constant.
- Ne pas confondre les propriétés du cosinus et du sinus : $\cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et non $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
- Il y a eu énormément de confusion entre le s.e.v F (qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$) et les coordonnées d'un point de F (qui sont des réels) avec des phrases du style « $(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda t + \mu t') = 5(\lambda z + \mu z') \in F$ ». NON il s'agit d'une égalité concernant des réels et non les 4-uplets. La bonne phrase est : « Donc $\lambda(x,y,z,t) + \mu(x',y',z',t') \in F$ » .
- Il y a eu énormément de confusion entre $\mathcal{E}_n$ et ses éléments avec des phrases du style « $\lambda\mathcal{E}_n + \mu\mathcal{E}'_n$ » ! ! ! ! Ce genre de questions ne devrait absolument pas vous poser de problèmes car la méthode est ultra classique :
  1) On vérifie que $\mathrm{O}_n = 0\mathrm{I}_n + 0\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$.
  2) On se donne deux éléments de $\mathcal{E}_n$: on les appelle par exemple A et B. On se donne deux scalaires λ et μ et on forme la quantité $\lambda A + \mu B$.
  3) Qu'est ce que ça veut dire que A appartient à $\mathcal{E}$? Cela signifie que A s'écrit sous la forme $a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n$ pour un certain $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. De même $B = c\mathrm{I}_n + d\mathrm{J}_n$ pour un certain $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ (et oui pas les mêmes a priori).
  4) On regroupe tout : $\lambda A + \mu B = \lambda(a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n) + \mu(c\mathrm{I}_n + d\mathrm{J}_n) = (\lambda a + \mu c)\mathrm{I}_n + (\lambda b + \mu d)\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$.
  5) On conclut : $\mathcal{E}_n$ est un s.e.v.

  Mais la solution que je propose dans ma correction est encore plus simple.
- Lorsqu'on effectue le produit matriciel de deux matrices de taille n quelconque, il est plus rigoureux de passer par le calcul des coefficients plutôt que de faire des calculs avec des pointillés. Plus généralement l'écriture $\sum$ est toujours préférable (et plus rigoureuse) à celle avec des pointillés... c'est pour ça que nous l'avons introduite en début d'année.
- Il est complètement faux d'écrire $J_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (J_n)_{i,k}(J_n)_{k,j}$. D'un côté on a une matrice et de l'autre un nombre. C'est $(J_n^2)_{i,j}$ qui est égal à cette somme.
- Il est impensable de ne pas avoir réussi les questions 1a, 1b et 3 de l'exercice 2 : c'est l'exercice de préparation au DS que nous avons fait en classe ! !
- Attention $J_n^k \neq n^{k-1}J_n$ lorsque $k = 0$: l'énoncé prenait pourtant bien cette précaution...
- Attention dans la question 2 de l'exercice 2 : $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n)$ ne désigne pas une base mais un sous espace vectoriel : l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs I_n et J_n. C'est $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n)$ qui est une base. Il ne faut pas confondre famille de vecteurs et espace vectoriel.
- Attention, si $X_{k+1} = M(\lambda)X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $X_k = M(\lambda)^k X_0$ et surtout pas $X_k = X_0 M(\lambda)^k$ car ce dernier produit matriciel n'a aucun sens lorsque les matrices sont d'ordre $n \geqslant 2$. Voilà pourquoi un raisonnement par récurrence est préférable à l'usage d'une phrase du style « c'est une suite géométrique », d'autant plus quand c'est indiqué en début d'énoncé.
- Lorsque $\Delta = \dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{\Delta} = 12$... concentrez-vous un peu !
- Dommage que très peu d'entre vous ont réussi à calculer H^{-1} dans le cas où $n = 3$ sans erreurs. Gardez en tête que les calculs qu'on vous demande de faire en DS sont accessibles en un temps raisonnable et donc jamais trop techniques. Ainsi, lorsque vous voyez apparaitre plein de fractions qui ne se simplifient pas, dites-vous que vous vous êtes surement trompés. A votre avis pourquoi je vous ai suggéré de tout multiplier par 60 dès le début ? Justement pour éviter les fractions. En général les fractions dans les pivots de Gauss sont à fuir comme la peste (c'est une source d'erreurs énorme). Enfin, sur votre brouillon, vérifiez que $HH^{-1} = \mathrm{I}_n$).
- La formule sur le degré d'une somme de polynôme n'est pas du tout maitrisée. A revoir d'urgence.