Devoir surveillé n° 6

jeudi 15 février 2018

La durée de l'épreuve est de quatre heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.

Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

2) Énoncer deux résultats du cours permettant de conclure que deux polynômes P et Q sont égaux.

3) Factoriser le polynôme X^5+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (cf. DM n° 3). On pourra remarquer que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$ afin de gagner du temps...

4) a) Factoriser $P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
On commencera par trouver une racine réelle évidente, puis on effectuera une division euclidienne.

   b) Soit α la racine de P dont la partie imaginaire est strictement positive. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{2018} = 2^k\, i$.

   c) Exprimer le reste de la division euclidienne de X^{2018} par P en fonction de k
On rencontrera un système linéaire et on utilisera la méthode du pivot de Gauss pour le résoudre. On alignera les inconnues d'une ligne à l'autre (quitte à laisser une place vide si un coefficient est nul) afin de faciliter la lecture.

5) a) Montrer que $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y = z-4t \\ y+3t = 5z \end{array} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   b) Déterminer une base de F.

Exercice 2 : Étude d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Toutes les récurrences de cet exercice doivent être rédigées soigneusement et intégralement.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On note $\mathcal{E}_n = \left\{a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$, où J_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) a) Déterminer une expression de J_n^2 en fonction de J_n.

   b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in \mathbb{R}$ tel que $J_n^k = x_k\, J_n$.
   On explicitera la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$.

2) a) Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera une base $\mathcal{B}_n$ (la plus simple possible).

   b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer les coordonnées de J_n^k dans la base $\mathcal{B}_n$.

   c) Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Que peut-on dire sur la famille (J_n^k, J_n^ℓ) ?

   d) Montrer que $\mathcal{E}_n$ est stable par produit (c'est-à-dire, pour tout $(A,B) \in \mathcal{E}_n^2$, on a $AB \in \mathcal{E}_n$).

   e) Montrer que deux vecteurs quelconques de $\mathcal{E}_n$ commutent.

3) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $M = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$. Justifier que $M^k \in \mathcal{E}_n$ et exprimer les coordonnées de M^k dans la base $\mathcal{B}_n$.

4) Soit $M = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n \in \mathcal{E}_n$.

   a) Supposons que $a = 0$. Montrer que M n'est pas inversible.

   b) Supposons que $a = -nb$. Notons U_n la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer MU_n et en déduire que M n'est pas inversible.

   c) Supposons que $a \notin \{0, -nb\}$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $M^{-1} \in \mathcal{E}_n$ (on explicitera les coordonnées de M^{-1} dans la base $\mathcal{B}_n$).

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{E}_n$ telles que $M^k = \mathrm{I}_n$.

6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{k+1} = (1-2\lambda)u_k + \lambda v_k + \lambda w_k \\ v_{k+1} = \lambda u_k + (1-2\lambda)v_k + \lambda w_k \\ w_{k+1} = \lambda u_k + \lambda v_k + (1-2\lambda)w_k \end{cases}$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $X_k = {}^t\!\begin{pmatrix} u_k & v_k & w_k \end{pmatrix}$.

   a) Montrer qu'il existe $M(\lambda) \in \mathcal{E}_3$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = M(\lambda)X_k$. On explicitera les coordonnées de $M(\lambda)$ dans la base $\mathcal{B}_3$ de $\mathcal{E}_3$.

   b) En déduire X_k en fonction de $M(\lambda)$, X_0 et k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   c) En déduire les termes généraux des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   d) Étudier la convergence de ces suites en fonction de λ, u_0, v_0 et w_0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Autrement dit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de H est $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Partie A : Cas où $n = 2$ ou $n = 3$

1) Former la matrice H dans le cas $n = 2$. Justifier qu'elle est inversible et expliciter H^{-1}.

2) Former la matrice H dans le cas $n = 3$. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, montrer qu'elle est inversible et expliciter H^{-1}.
Pour éviter de manipuler des fractions, on pourra montrer que $60H$ est inversible et remarquer que $H^{-1} = 60 \cdot (60H)^{-1}$. Même si les nombres apparaissant dans les matrices pourront avoir trois chiffres, le calcul est tout à fait accessible et le mener jusqu'au bout sera récompensé. La méthode de Gauss-Jordan doit être respectée à la lettre et toutes les opérations devront obligatoirement apparaitre sur la copie.

Partie B : Cas général

L'objectif de cette partie est de montrer que H est inversible, quelque soit sa taille. Pour cela on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $X = {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.

1) Que doit-on montrer concernant $x_1, \ldots, x_n$ pour en déduire que H est inversible ?

2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Écrire, sous forme de somme, la $i^{\text{ème}}$ ligne du système d'équations correspondant à l'équation $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.

3) Introduisons le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j L_{j-1}(X)$ où, pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} (X+k)$.
Autrement dit

$$\begin{aligned} P(X) = x_1(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1) + x_2X(X+2)(X+3)\cdots(X+n-1) \\ + x_3X(X+1)(X+3)\cdots(X+n-1) + x_nX(X+1)(X+2)\cdots(X+n-2) \end{aligned}$$

a) Soient $j \in [\![0,n-1]\!]$ et $i \in [\![1,n]\!]$. Écrire $L_j(i)$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{\beta(i+j)}$ où α et β sont des factorielles que l'on précisera.

b) Que dire sur le degré de P ?

c) Calculer $P(i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. En déduire que P est le polynôme nul.

d) Montrer que $P(-i+1) = L_{i-1}(1-i)\, x_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

e) Conclure.

Partie C : Calcul de la somme des coefficient de H^{-1}

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $s_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de H^{-1}. L'objectif de cette partie est de calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}$, c'est-à-dire la somme des coefficient de H^{-1}.

1) Calculer la somme des coefficients de H^{-1} dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.

2) Soit U la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons y_k le $k^{\text{ième}}$ coefficient de la matrice $Y = H^{-1}U$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

3) Introduisons les polynômes $S(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j L_{j-1}(X)$ et $Q(X) = S(X) - \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$.

   a) Calculer le degré de Q et son coefficient dominant.

   b) Calculer $Q(i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

   c) En déduire une factorisation de Q.

4) a) Calculer le coefficient d'indice $n-1$ du polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X+k) - \prod_{k=1}^{n}(X-k)$.

   b) En calculant le coefficient d'indice $n-1$ de S, en déduire que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = n^2$.