Correction du DS n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1 : Questions en vrac

---

1) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

2) La fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe. Faisons le changement de variables $t=\tan(u)$ (on a « $u=\operatorname{Arctan}(t)$ » et « $dt=(1+\tan^2(u))\,du$ ») :
$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{1+\tan^2(u)}{(1+\tan^2(u))^2}\,du=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2(u)}\,du=\int_0^{\pi/4}\cos^2(u)\,du.$$
Ainsi
$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos(2u)}{2}\,du=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi+2}{8}.$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a
$$\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^n\frac{k}{\sqrt{n+k}}=\frac{n}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^n\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$
avec $f:x\longmapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne alors que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^n\frac{k}{\sqrt{n+k}}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx&=\int_0^1\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)dx\\&=\int_0^1\left(\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)dx\\&=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}-2\sqrt{1+x}\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)-2(\sqrt{2}-1)=\frac{2(2-\sqrt{2})}{3}\end{aligned}$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}-^*$). La fonction $f:t\longmapsto\dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}$ est continue sur l'intervalle $[1/x,x]$ (resp. $[x,1/x]$) donc l'intégrale $\varphi(x)$ est bien définie. Bien sûr la fonction n'est pas définie en 0 si bien que $D_\varphi=\mathbb{R}^*$.

   a) Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Le changement de variable $u=-t$ (avec « $du=-dt$ ») dans l'intégrale $\phi(-x)$ donne :
$$\varphi(-x)=\int_{-1/x}^{-x}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,dt=\int_{1/x}^{x}\frac{\operatorname{Arctan}(-u)}{-u}\,(-du)=-\int_{1/x}^{x}\frac{\operatorname{Arctan}(u)}{u}\,du=-\varphi(x).$$
   Ainsi φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

b) Notons F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) = F'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\frac{\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$
$$= \frac{1}{x}\left(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

c) La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Ainsi la fonction ψ' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ si bien que ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \psi(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \dfrac{\psi(x)}{x} = \dfrac{\pi}{2x}$. Nous en déduisons qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x) + K$. On a $\varphi(1) = 0$ donc $K = 0$. Enfin, puisque φ est impaire, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad \varphi(x) = -\varphi(-x) = -\frac{\pi}{2}\ln(-x).$$

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{2+u_n}$. Posons $f : x \in [0,1] \longmapsto \dfrac{e^x}{2+x}$.

1) Pour tout $x \in [0,1]$, $2 + x \neq 0$. Par conséquent la fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \frac{e^x(2+x) - e^x}{(2+x)^2} = \frac{e^x(1+x)}{(2+x)^2} > 0.$$

Il s'ensuit que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{e}{3}$.

Ensuite, procédons par récurrence. On a déjà $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$. Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} = f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) = \frac{e}{3}$$

et donc $u_{n+1} \in [0,1]$. D'où le résultat par récurrence.

2) On remarque que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$, avec $g : x \longmapsto e^x - 2x - x^2$. La fonction g est de classe C^2 sur $[0,1]$. On a $g'(x) = e^x - 2 - 2x$, $g''(x) = e^x - 2$ pour tout $x \in [0,1]$. Nous en déduisons que g' est décroissante sur $[0, \ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2), 0]$. Puisque $g'(0) = -1 < 0$ et $g'(1) = e - 4 < 0$, nous en déduisons que $g' < 0$ sur $[0,1]$ et donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus g est continue et $0 \in [g(1), g(0)] = [e-3, 1]$. Par conséquent le théorème de la bijection entraîne qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

3) La fonction f' est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f''(x) = \frac{e^x(1+1+x)(2+x)^2 - e^x(1+x)2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{e^x((2+x)^2 - 2(1+x))}{(2+x)^3} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(2+x)^3} > 0.$$

Ainsi f' est strictement croissante sur $[0,1]$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{1}{4} = f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) = \frac{2e}{9} \leqslant \frac{2}{3}.$$

4) a) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et $|f'| \leqslant \frac{2}{3}$ sur $[0,1]$. Par conséquent l'inégalité des accroissements finis entraîne que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}|x-y|.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|.$$

b) Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$, nous avons $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, par encadrement, $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de choisir n_p tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_p$. Or on a

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-p} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -p\ln(10) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{p\ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)},$$

puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(2/3) < 0$. On prend $n_p = 1 + \left\lfloor \frac{p\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)} \right\rfloor$.

5) Et voici le programme demandé :

```
p=input('Entrez un entier naturel non nul :');
n=floor(p*log(10)/log(3/2))+1;
u=1/2;
for  k=1:n
     u=exp(u)/(2+u);
end
disp('Une valeur approchée alpha à 10∧(-'+string(p)+') près est'+string(u)+'.')
```

Problème : Calcul de $\zeta(2)$

Partie A : Convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $t \in [k-1,k]$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ donc $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.

On conclut en remarquant que $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}\int_{k-1}^{k} 1\,dt = \frac{k-(k-1)}{k^2} = \frac{1}{k^2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, d'après la question précédente et la relation de Chasles,

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ d'où $S_n \leqslant 2$. Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et majorée. Le théorème de la limite monotone entraîne que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $1 < \frac{5}{4} = S_2 \leqslant S_n \leqslant 2$, nous obtenons $1 < \ell \leqslant 2$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les foncions $t \longmapsto \cos^n(t)$ et $t \longmapsto t\cos^n(t)$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc les intégrales I_n et W_n sont bien définies.

1) On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$ et donc $A_0 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_0}{W_0} = I_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_1 : t \longmapsto t$ et $v_1 : t \longmapsto \cos^{2n}(t)$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u_1' : t \longmapsto 1$ et $v_1' : t \longmapsto -2n\sin(t)\cos^{2n-1}(t)$ et

$$\begin{aligned} W_{2n} = \int_0^{\pi/2} u_1'(t)v_1(t)\,dt &= \left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2nt\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt \\ &= 2n\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_2 : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et $v_2 : t \longmapsto \sin(t)\cos^{2n-1}(t)$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u_2' : t \longmapsto t$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad v_2'(t) &= -(2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t) + \cos^{2n}(t) \\ &= -(2n-1)\big(1-\cos^2(t)\big)\cos^{2n-2}(t) + \cos^{2n}(t) \\ &= -(2n-1)\cos^{2n-2}(t) + 2n\cos^{2n}(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} u_2'(t)v_2(t)\,dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\big(2n\cos^{2n}(t) - (2n-1)\cos^{2n-2}(t)\big)\,dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\cos^{2n-2}(t)\,dt - 2n\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= \frac{2n-1}{2}I_{2n-2} - nI_{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$W_{2n} = 2n\left(\frac{2n-1}{2}I_{2n-2} - nI_{2n}\right) = n(2n-1)I_{2n-2} - 2n^2I_{2n}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} A_{n-1} - A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}} &= \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)I_{2n-2}}{2nW_{2n}} - \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}} \\ &= \frac{\pi}{4n^2W_{2n}}\left(n(2n-1)I_{2n-2} - 2n^2I_{2n}\right) = \frac{\pi}{4n^2}. \end{aligned}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, via une somme télescopique,

$$I_0 - A_n = A_0 - A_n = \sum_{k=1}^{n}(A_{k-1} - A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4k^2} = \frac{\pi}{4} S_n$$

3) a) Soit $\varphi : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi' = \cos - \frac{2}{\pi}$. La fonction φ' est continue et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, puisque $\varphi'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$, le TVI entraîne qu'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\varphi' \geqslant 0$ sur $[0, \alpha]$ et $\varphi' \leqslant 0$ sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Nous en déduisons que φ est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ si bien que $\varphi(t) \geqslant 0$ (c'est-à-dire $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$) pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\sin^2(t) \geqslant \frac{4t^2}{\pi^2}$ donc $0 \leqslant \cos^{2n}(t) = (1 - \sin^2(t))^n \leqslant \left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$.
De plus $0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{\pi t}{2}$ donc $t^2 \cos^{2n}(t) \leqslant \frac{\pi t}{2}\left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$.

Puisque les fonctions $t \longmapsto t^2 \cos^{2n}(t)$ et $t \longmapsto \frac{\pi t}{2}\left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $I_{2n} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\pi t}{2}\left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt.$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variables $x = 1 - \frac{4t^2}{\pi^2}$ (avec « $dx = -\frac{8t}{\pi^2}\,dt$ ») :

$$\int_0^{\pi/2} t\left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt = \int_1^0 x^n \frac{-\pi^2}{8}\,dx = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{\pi^2}{8(n+1)}.$$

Ainsi $I_{2n} \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{n}}{16(n+1)}\,\frac{\pi}{2\sqrt{n}W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{\pi}}{16\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}W_{2n}}.$$

On sait que $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et on a $\frac{\pi^3\sqrt{\pi}}{16\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6) Nous en déduisons que $S_n = \frac{4}{\pi}(I_0 - A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\pi} I_0 = \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Quelques remarques générales :

- Le DS a été noté sur 31. Le barème approximatif est le suivant : 8,5/8/13,5.

- Il est important de ne pas énerver le correcteur, surtout quand celui-ci fait la remarque tous les jours depuis cinq mois qu'il ne faut pas confondre nombre et fonction ou nombre et suite... Rappelons qu'on peut dire
  — $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et non S_n converge,
  — $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non S_n est croissante,
  — $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et non S_n est bornée,
  — f est continue et non $f(x)$ est continue,
  — f est dérivable et non $f(x)$ est dérivable.

  On rappelle que, pour dire qu'une fonction f est définie sur un intervalle I, on dispose de deux phrases au choix (et non pas un mélange des deux) :
  — (le nombre) $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in I$.
  — (la fonction) f est définie sur I.

- Si F désigne une primitive (donc une fonction dérivable) de f sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la dérivée de $x \longmapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ mais $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Dans l'étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsqu'on demande d'étudier les variations de la fonction f, c'est pour les utiliser après... regardez bien attentivement la première question de l'exercice 2.

- Le TVI ne dit pas qu'une fonction f continue et strictement décroissante admet un point fixe. Par contre il affirme que si $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue, strictement décroissante sur $[a, b]$ et $0 \in [f(b), f(a)]$ alors g s'annule et donc f admet un unique point fixe. Si on veut l'unicité, il s'agit plutôt du théorème de la bijection que du TVI.

- D'ailleurs évitez de parler de limite en x_0 pour une fonction continue en x_0 : il s'agit simplement de $f(x_0)$. J'ai beaucoup rencontré cela dans la question 2 de l'exercice 2 où il fallait appliquer le TVI sur un segment.

- Dans un algorithme (Scilab ou autre) dont le but est de calculer une valeur approchée d'un réel α inconnu via le calcul des termes successifs d'une suite, on ne peut bien sûr pas utiliser le réel α (comme condition d'arrêt d'une boucle While ou For par exemple)... puisqu'on ne le connait pas.

- Dans la question A2 du problème, on avait bien fait attention d'éviter le cas où $k = 1$. De plus la partie A était très détaillée pour surtout que vous ne fassiez pas l'erreur de considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$... ce que vous avez presque tous fait. C'est la preuve que, en majorité, vous ne lisez pas les questions avec suffisamment d'attention et que vous ne prenez pas la peine de vérifier que les intégrales que vous manipulez existent. Pour information, si $x > 0$, alors
$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
  Ainsi, si on veut donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$, on doit lui donner la valeur $+\infty$.

- Le fait que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $1 \leqslant S_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ne permet pas de conclure (avec le théorème de la limite monotone) que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En effet $1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$ dépend de $n \in \mathbb{N}^*$ donc ce n'est pas un majorant de la suite. Par contre on en déduit que $1 \leqslant S_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut alors appliquer le théorème de la limite monotone.

- Il est impensable après cinq mois de CPGE ECS de ne pas savoir :
  - — Montrer que $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cela revient à étudier la signe de $\varphi : t \longmapsto \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (en étudiant ses variations via l'étude du signe de φ', passant lui même par l'étude de φ'').
  - — Montrer que la fonction $g : x \longmapsto e^x - 2x - x^2$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
  - — Intégrer $t \longmapsto t^2$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ sans se tromper.
  - — Effectuer des manipulations algébriques simples avec des fractions comme dans la question B2b du problème.

  Il est impensable aussi de
  - — Confondre primitive et dérivée.
  - — Confondre addition et multiplication (dans des calculs avec des fractions).
  - — Se tromper en divisant deux fractions.
  - — Écrire que la somme d'inverses de réels non nuls est égale à l'inverse de la somme de ces réels.
  - — Ne pas savoir exhiber la bijection réciproque de $t \longmapsto 1 - \frac{4t^2}{\pi^2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.