Devoir surveillé n° 5

vendredi 19 janvier 2018

La durée de l'épreuve est d'environ trois heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.

Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Énoncer le théorème des accroissements finis (*le théorème pas l'inégalité !*).
2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ avec le changement de variable $t=\tan(u)$ (dont on admettra la validité).
3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$.
4) Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,dt$.
   a) Montrer que φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
   b) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
   c) Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   d) En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{2+u_n}$. Posons $f : x \in [0,1] \longmapsto \dfrac{e^x}{2+x}$.

1) Étudier les variations de la fonction f et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2) Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0,1]$.
3) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
4) a) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant M|u_n-\alpha|$ où M est un réel à préciser.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $n_p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_p$, $|u_n-\alpha| \leqslant 10^{-p}$.
5) Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur un entier naturel non nul p et qui renvoie une approximation de α à 10^{-p} près.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. L'objectif de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie A : Convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $S_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$.
4) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel de $]1,2]$. On note $\zeta(2)$ sa limite.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les intégrales de Wallis

L'objectif de cette partie est de montrer que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ à l'aide des intégrales de Wallis.

On rappelle qu'il s'agit des intégrales $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$, $n \in \mathbb{N}$. Nous les avons déjà rencontrées dans le DM nº 9 où nous avons étudié plusieurs de leurs propriétés (notamment le comportement asymptotique de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et leurs conséquences. Certains résultats utiles à cet exercice seront rappelés le moment venu.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}}$$

1) Calculer W_0, I_0 et A_0.
2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que

$$W_{2n} = 2n \int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt,$$

   puis que $W_{2n} = n(2n-1)I_{2n-2} - 2n^2 I_{2n}$.

   b) *On rappelle que l'on a montré, dans le DM nº 9, que $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad A_{n-1} - A_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.

   c) Conclure (sans utiliser de récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_0 - A_n = \dfrac{\pi}{4}S_n$.
3) a) Montrer que, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad \sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{2n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt$.
4) En s'aidant du changement de variable $x = 1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}$ (dont on admettra la validité), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{2n} \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

5) *On rappelle que l'on a montré, dans le DM nº 9, que $\sqrt{n}\,W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.*

   A l'aide d'un encadrement, montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
6) Conclure que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

WALLIS' INTEGRALS WILL RETURN