Devoir surveillé n° 3

mardi 28 novembre 2017

La durée de l'épreuve est d'environ deux heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.

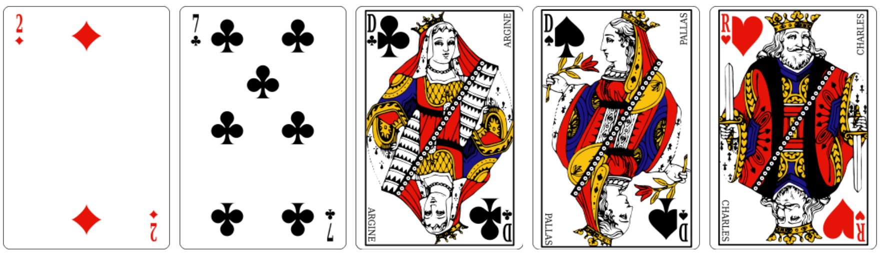
Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1

1) **Questions de cours.** Soit $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
   a) Donner la définition d'une probabilité sur $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega))$.
   b) Donner la définition d'un système complet (fini) d'événements sur $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega))$.
2) On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de $4r$ cartes (avec $r = 8$ ou 13).
   a) Donner un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω.
   b) Calculer, en fonction de r, la probabilité d'obtenir une paire (au sens du poker, c'est-à-dire deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différents de celui la paire).
   Dans cette question et les suivantes, on ne cherchera pas à simplifier les éventuels coefficients binomiaux et factorielles.
   c) Calculer, en fonction de r, la probabilité d'obtenir exactement deux dames et exactement deux trèfles.

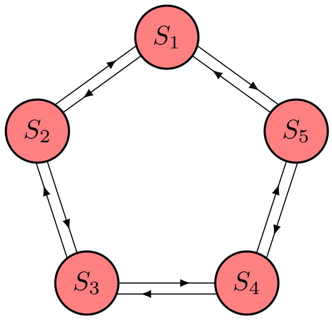


Regardez attentivement cet exemple de main possible pour la question c (dans le cas où $r = 13$)

   d) En déduire, en fonction de r, la probabilité d'obtenir exactement deux dames ou exactement deux trèfles.
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Lors d'une partie de poker à n tours (que l'on suppose indépendants les uns des autres), l'un des joueurs s'intéresse justement aux tours où il a obtenu une paire. Notons p la probabilité d'obtenir une paire.
   a) Donner un espace probabilisé fini $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω_n.
   b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n comptant le nombre de tours où le joueur a obtenu une paire.
   c) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
   d) Exprimer, en fonction de n et p, la probabilité d'avoir obtenu une paire au plus deux fois dans la partie.

Énoncé du problème

Les agents américains Wade et Leiter se sont donnés rendez-vous au rez-de-chaussée du Pentagone dans l'une des cinq salles d'attente situées chacune à l'un des cinq sommets du bâtiment. Notons (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) et (S_5) ces cinq sommets. Ils sont reliés par des doubles couloirs à sens uniques, comme dans le schéma ci-contre.



Les deux agents arrivent à l'heure prévue mais, suite à un malentendu, ils se trouvent à deux sommets adjacents (par exemple (S_1) et (S_2)). Pour des raisons de sécurité, ils ont du laisser leur téléphone portable à l'entrée du bâtiment.

Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre en empruntant les différents couloirs du Pentagone selon les règles suivantes :

- A partir d'un sommet, chacun choisit de se rendre à l'un des deux sommets adjacents de façon équiprobable.
- Les déplacements des deux agents se font simultanément et tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns les autres.

Ils continuent de se déplacer de cette façon jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne peuvent pas se croiser dans un même couloir puisque chaque couloir a un sens de circulation unique). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus. On s'intéresse à la probabilité que les agents se retrouvent au bout de n étapes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Modélisation

Soit $N \geqslant 3$. On suppose que les agents se limitent à un nombre fini N d'étapes afin de modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Dans ce problème, nous ne nous intéressons pas aux numéros des sites en lesquels se trouvent les agents. Nous étudions seulement le nombre (minimum) de couloirs qui les séparent Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, introduisons donc

- A_n l'événement « Les agents sont sur le même site à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,
- B_n l'événement « Les agents sont sur des sites adjacents à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,
- C_n l'événement « Les agents sont à deux couloirs de distance à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,

et notons $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

Pour nous aider à calculer ces probabilités, introduisons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- L_n l'événement « A l'étape n, l'agent Leiter prend, sans le savoir, la direction le rapprochant de la position de l'agent Wade à l'issue de l'étape $n-1$ ».
- W_n l'événement « A l'étape n, l'agent Wade prend, sans le savoir, la direction le rapprochant de la position de l'agent Leiter à l'issue de l'étape $n-1$ ».

Exemple : supposons que Wade se trouve en (S_1) et Leiter en (S_4) à l'issue de l'étape $n_0 - 1$, avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$. L'événement L_{n_0} correspond au fait que Leiter se rende en (S_5). L'événement $\overline{W}_{n_0}$ correspond au fait que Wade se rende en (S_2). On remarquera que si les deux événements $\overline{W}_{n_0}$ et $\overline{L}_{n_0}$ sont réalisés alors, à l'issue de l'étape n, les deux agents ne sont plus qu'à un couloir de distance.

Par hypothèse, la famille $(L_n, W_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

Questions

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que dire de la famille d'événements (A_n, B_n, C_n) ?

   b) Calculer a_0, b_0, c_0.

2) a) Justifier que $C_1 = \overline{L}_1 \cap \overline{W}_1$. En déduire la valeur de c_1.

   On pourra commencer par lister les quatre possibilités de position des deux agents à l'issue de la première étape.

   b) Exprimer B_1 en fonction de L_1 et W_1. En déduire la valeur de b_1.

   c) En déduire que $a_1 = 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier brièvement l'inclusion $\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \subset C_n$.

   En déduire que $c_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   b) Montrer de façon analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   c) Montrer que $A_2 = \overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap L_2 \cap W_2$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{16}$.

4) Fixons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

   a) Justifier que $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ et $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

   b) A l'aide des événements L_{n+1} et W_{n+1}, montrer soigneusement que $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   c) Calculer (dans cet ordre) $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$.

5) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\begin{cases} a_{n+1} = x_a\, a_n + x_b\, b_n + x_c\, c_n \\ b_{n+1} = y_a\, a_n + y_b\, b_n + y_c\, c_n \\ c_{n+1} = z_a\, a_n + z_b\, b_n + z_c\, c_n \end{cases}$,

   où $x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, z_a, z_b, z_c$ sont des réels que l'on explicitera.

   On remarquera au passage (sans le démontrer) que ces trois formules restent vraies pour $n = 0$ et $n = 1$.

6) a) A l'aide du système ci-dessus, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = \dfrac{5}{4} c_{n+1} - \dfrac{5}{16} c_n$.

   b) Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta < 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.

   c) A partir de la dernière ligne du système, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\beta^n$.

   d) En déduire a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, α et β.

   e) Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Commenter.

7) A l'étape N les deux agents sont à deux couloirs de distance. Quelle est la probabilité qu'ils étaient déjà à deux couloirs de distance à l'étape $N - 1$. On l'exprimera en fonction de N, α et β.