Correction du DS n° 2

Exercice 1 : Questions de cours

1) On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \big(n\geqslant n_0 \quad\Longrightarrow\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon\big).$$

2) On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A<0, \quad \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \big(n\geqslant n_0 \quad\Longrightarrow\quad u_n\leqslant A\big).$$

3) Raisonnons par l'absurde et supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites réelles distinctes ℓ et ℓ', avec $\ell<\ell'$. Prenons $\varepsilon=|\ell'-\ell|/4$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', il existe $n_0'\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0'$, $|u_n-\ell'|\leqslant\varepsilon$. Pour $n\geqslant\max(n_0,n_0')$, l'inégalité triangulaire entraîne que

$$|\ell-\ell'|=|(\ell-u_n)+(u_n-\ell')|\leqslant|\ell-u_n|+|u_n-\ell'|\leqslant 2\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{2}$$

C'est absurde. Ainsi la limite d'une suite réelle convergente est unique.

4) Pour tous complexes z et z', $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$. En effet, nous avons

$$|z+z'|^2=(z+z')(\overline{z+z'})=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}=|z|^2+2\,\mathfrak{Re}(\overline{z}z')+|z'|^2,$$

$$(|z|+|z'|)^2=|z|^2+|z'|^2+2|z||z'|=|z|^2+|z'|^2+2|\overline{z}||z'|=|z|^2+|z'|^2+2|\overline{z}z'|.$$

Puisque $\mathfrak{Re}(\overline{z}z')\leqslant|\overline{z}z'|$, nous obtenons $|z+z'|^2\leqslant(|z|+|z'|)^2$. D'où l'inégalité triangulaire en prenant la racine (ce sont des nombres positifs de chaque côté de l'inégalité).

Exercice 2 : Questions en vrac

1) Pour qu'un réel y vérifie $2y-5-\sqrt{4y-7}<0$, il faut déjà que $\sqrt{4y-7}$ soit bien défini, c'est-à-dire $y\geqslant\dfrac{7}{4}$.

Donnons-nous $y\in\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right[$.

- Si $y<\dfrac{5}{2}$, alors $2y-5<0$ et donc $2y-5-\sqrt{4y-7}<0$.
- Supposons que $y\geqslant\dfrac{5}{2}$. Alors $2y-5\geqslant 0$ et donc nous avons :

$$\begin{aligned}2y-5-\sqrt{4y-7}<0 \quad&\Longleftrightarrow\quad 2y-5<\sqrt{4y-7}\\ &\Longleftrightarrow\quad 4y^2+25-20y<4y-7\\ &\Longleftrightarrow\quad 4y^2-24y+32<0\\ &\Longleftrightarrow\quad y^2-6y+8<0.\end{aligned}$$

Au deuxième équivalent, nous avons utilisé le fait que la fonction carrée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le trinôme du second degré X^2-6X+8 admet pour discriminant $\Delta=4$. Par conséquent il admet deux racines réelles : $\dfrac{6-2}{2}=2$ et $\dfrac{6+2}{2}=4$. Nous en déduisons que $2y-5-\sqrt{4y-7}<0$ si et seulement si $y\in\left]2,4\right[$. Puisque $y\geqslant\dfrac{5}{2}$, cela équivaut à $y\in\left[\dfrac{5}{2},4\right[$.

Finalement, nous obtenons que l'ensemble des solutions de $2y-5-\sqrt{4y-7}<0$ est $\left[\frac{7}{4},4\right[$.

2) La fonction $u \longmapsto u^{1/\pi}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ puisque $1/\pi>0$. Soit $u\in\mathbb{R}_+$. On a $2-u^{1/\pi}>0$ si et seulement si $2>u^{1/\pi}$ si et seulement si $u<2^\pi$ (puisque la fonction $x\longmapsto x^\pi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Comme $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que φ est définie sur $D_\varphi=[0,2^\pi[$.

La fonction $u\longmapsto u^{1/\pi}$ est dérivable sur $]0,2^\pi[$ puisque $1/\pi<1$ et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que φ est définie sur $]0,2^\pi[$. Pour tout $u\in\,]0,2^\pi[$,

$$\varphi'(u)=\frac{-\frac{1}{\pi}u^{1/\pi-1}}{2-u^{1/\pi}}=\frac{-1}{\pi u^{1-1/\pi}(2-u^{1/\pi})}.$$

3) La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$0=r^2-2\cos(\alpha)r+1=r^2-(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})r+1=(r-e^{i\alpha})(r-e^{-i\alpha}).$$

Puisque $\alpha\in\,]0,\pi[$, elle admet donc deux racines complexes $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$. Par conséquent il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad s_n=\lambda\cos(n\alpha)+\mu\sin(n\alpha).$$

On a $1=s_0=\lambda\cos(0)+\mu\sin(0)=\lambda$ et $1=s_1=\lambda\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)=\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)$. Puisque $\alpha\in\,]0,\pi[$, $\sin(\alpha)\neq 0$ et $\cos(\alpha/2)\neq 0$ donc

$$\mu=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}s_n&=\cos(n\alpha)+\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\sin(n\alpha)\\&=\frac{\cos(\alpha/2)\cos(n\alpha)+\sin(\alpha/2)\sin(n\alpha)}{\cos(\alpha/2)}=\frac{\cos((2n-1)\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.\end{aligned}$$

4) Le discriminant de l'équation $5iz^2+(2-7i)z-1+3i=0$ est $\Delta=15-8i$. Cherchons en une racine complexe. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}(x+iy)^2=15-8i\quad&\Longleftrightarrow\quad x^2+2ixy-y^2=15-8i\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=15\\xy=-4\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=15\\x^2+y^2=|x+iy|^2=|\Delta|\\xy=-4\end{cases}\end{aligned}$$

On calcule que $|\Delta|=\sqrt{15^2+(-8)^2}=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$. Ainsi

$$\begin{aligned}(x+iy)^2=15-8i\quad&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=15\\x^2+y^2=17\\xy=-4\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2=\frac{1}{2}(17+15)=16\\y^2=\frac{1}{2}(17-15)=1\\xy=-4\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}|x|=4,\quad|y|=1\\xy=-4\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\quad(x,y)=(4,-1)\quad\text{ou}\quad(x,y)=(-4,1).\end{aligned}$$

Ainsi une racine carrée complexe de $15-8i$ est $4-i$. Nous en déduisons que l'équation admet deux racines complexes :

$$\frac{-(2-7i)-(4-i)}{2\cdot 5i}=\frac{-6+8i}{10i}=\frac{4+3i}{5}\qquad\text{et}\qquad\frac{-(2-7i)+(4-i)}{2\cdot 5i}=\frac{2-6i}{10i}=\frac{3-i}{5}.$$

5) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) On a, d'après la formule de Moivre puis la formule d'Euler pour le cosinus,

$$(1+e^{2i\theta})^n = \left(e^{i\theta}(e^{-i\theta}+e^{i\theta})\right)^n = e^{in\theta}(e^{-i\theta}+e^{i\theta})^n = e^{in\theta}(2\cos(\theta))^n = 2^n \cos^n(\theta)\, e^{in\theta}.$$

b) Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\theta\right) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\pi/3+2ik\theta}\right) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\pi/3}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{2ik\theta}\right).$$

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{2ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{2i\theta}\right)^k 1^{n-k} = (1+e^{2i\theta})^n = 2^n \cos^n(\theta)\, e^{in\theta}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\theta\right) &= \mathfrak{Im}\left(e^{i\pi/3}\, 2^n \cos^n(\theta)\, e^{in\theta}\right)\\ &= \mathfrak{Im}\left(2^n \cos^n(\theta)\, e^{in\theta+i\pi/3}\right) = 2^n \cos^n(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{3}+n\theta\right).\end{aligned}$$

Exercice 3 : Étude d'une suite récurrente (d'après EDHEC 2016)

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f : y \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{e^{-y}}{y}$.
Commençons par remarquer que les fonctions $y \mapsto e^{-y}$ et $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$ donc leur produit, la fonction f, également. Par ailleurs, la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si bien que, par récurrence immédiate, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

Partie A

1)
- On a $\lim\limits_{y\to 0^+} e^{-y} = 1$ et $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1}{y} = +\infty$ donc $\lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = +\infty$ par produit de limites.
- On a $\lim\limits_{y\to +\infty} e^{-y} = 0$ et $\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1}{y} = 0$ donc $\lim\limits_{y\to +\infty} f(y) = 0$ par produit de limites.

2) La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(y) = \frac{-e^{-y}y - e^{-y}}{y^2} = -\frac{1+y}{y^2}e^{-y} < 0.$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme des fonctions $y \longmapsto e^{-y}$ et $y \longmapsto -y^2$ qui sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f(y) - y = \frac{e^{y} - y^2}{y} = \frac{g(y)}{y}.$$

Par conséquent y est un point fixe de f si et seulement si y vérifie $g(y) = 0$.

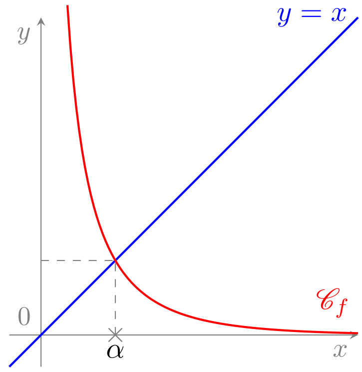
La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs :
- On a $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y) = 1 - 0 = 1$.
- On a $\lim\limits_{y\to +\infty} e^{-y} = 0$ et $\lim\limits_{y\to +\infty} y^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{y\to +\infty} g(y) = -\infty$ par produit de limites.

Comme $0 \in]-\infty, 1]$, le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) entraîne qu'il existe unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ce réel est donc l'unique point fixe de f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

c) Nous avons $e^{-1} - 1 < 0 < e^{-1/e} - e^{-2}$ donc $g(1) < g(0) < g(1/e)$. Par stricte croissance de g, nous obtenons donc que $1 > 0 > 1/e$.

4) Nous en déduisons le tableau de variations et l'allure de la courbe :

y	0		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	α	$\searrow$	0



Partie B

1) On conjecture que $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, que $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

2) a) On calcule $x_1 = 1/e$ puis $x_2 = \dfrac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e}$. On a $x_2 - x_0 = e^{1-1/e} - 1 > 0$ (car $1 - 1/e > 0$ et $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Ainsi $x_2 > x_0$. Ensuite, puisque f est strictement décroissante, on obtient que $x_3 = f(x_2) < f(x_0) = x_1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$:« $x_{2(n+1)} > x_{2n}$ ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation :* On a déjà montré que $x_2 > x_0$ donc $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $x_{2(n+1)} > x_{2n}$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $x_{2(n+1)+1} = f(x_{2(n+1)}) < f(x_{2n}) = x_{2n+1}$ puis $x_{2(n+1)+2} = f(x_{2(n+1)+1}) > f(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$. Ainsi $x_{2(n+2)} > x_{2(n+1)}$, c'est-à-dire $P(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion :* Par récurrence, nous obtenons donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} > x_{2n}$. Cela signifie que $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} > x_{2n}$ donc $x_{2(n+1)+1} = f(x_{2(n+1)}) < f(x_{2n}) = x_{2n+1}$. Ainsi $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Partie C

Introduisons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$h(y) = \frac{e^{-f(y)}}{f(y)} = \frac{y\, e^{-e^{-y}/y}}{e^{-y}} = y \exp\left(y - \frac{e^{-y}}{y}\right) = y \exp\left(y - f(y)\right).$$

2) On a $\lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = +\infty$ donc $\lim\limits_{y\to 0^+} (y - f(y)) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{y\to 0^+} \exp(y - f(y)) = 0$. Nous en déduisons que $\lim\limits_{y\to 0^+} h(y) = 0$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle est la composée de f avec elle-même. De plus $\lim\limits_{y\to 0^+} h(y) = 0 = h(0)$ donc elle est également continue en 0.

4) On a $h(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de h. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$y = h(y) \iff y \exp(y - f(y)) = y \iff \exp(y - f(y)) = 1 \iff y = f(y) \iff y = \alpha,$$

d'après la question 3b de la partie A. Ainsi α est l'unique autre point fixe de h sur $\mathbb{R}_+$.

Partie D

1) La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par ailleurs elle est minorée par 0. Le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel ℓ.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)+1} = h(x_{2n+1})$, et puisque la fonction h est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que ℓ est un point fixe de h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$. Par ailleurs la décroissance de $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n+1} \leqslant x_1 = \dfrac{1}{e}$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell \leqslant \dfrac{1}{e}$. Enfin $\alpha > \dfrac{1}{e}$ si bien que ℓ ne peut être égale à α. Ainsi $\ell = 0$.

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisqu'elle est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel ℓ'. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} = h(x_{2n})$, et puisque la fonction h est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que ℓ' est un point fixe de h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\ell = 0'$ ou $\ell' = \alpha$. Par ailleurs la croissance de $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \geqslant x_0 = 1$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell' \geqslant 1$. Enfin $\alpha < 1$ si bien que ℓ ne peut être égale ni à α, ni à 0. C'est absurde.

Ainsi $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Puisqu'elle est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers $+\infty$.

3) Puisque $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite, nous en déduisons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Partie E

Voici le script complété :

```
A=input('Entrez un réel A (grand) :');
eps=input('Entrez un réel epsilon (petit) :');
r=0; x=1; y=1/%e;
while    (abs(y)>eps)|(x<A)
         r=r+2; x=exp(-y)/y; y=exp(-x)/x;
end
n=r/2;
disp('Le premier rang n tel que u(2n)>A et u(2n+1)<eps est n=' + string(n));
```

Exercice 4 : Vers le calcul de $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ pour $n \geqslant 3$

Partie A

1) On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) a) Pour tout réel x tel que $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $2x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.

b) On a donc $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$. Par conséquent $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation $1 = \dfrac{2x}{1-x^2}$, c'est-à-dire $x^2+2x-1=0$. Son discriminant est $\Delta = 8$ donc elle admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1+\sqrt{2}$.

Partie B

1) Soit $n \geqslant 3$. Notons (E_n) l'équation $Z^n = 1$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

Puisque $0^n = 0 \neq 1$, on en déduit que 0 n'est pas solution de (E_n). Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Il existe alors $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $Z = Re^{i\theta}$. On a $Z^n = 1$ si et seulement si $(Re^{i\theta})^n = 1$ si et seulement si $R^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
Z^n = 1 \quad &\iff \quad \begin{cases} R^n = 1 \\ n\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} R = 1 \\ \theta \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} R = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad Z = e^{2ik\pi/n} = \omega^k,
\end{aligned}$$

avec $\omega = e^{2i\pi/n}$. Puisque, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega^{k+n} = e^{2i(k+n)\pi/n} = e^{2ik\pi/n}e^{2i\pi} = e^{2ik\pi/n} = \omega^k$, nous en déduisons que (E_n) admet exactement n solutions : 1, ω, ω^2, $\dots$, ω^{n-1}.

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$ vérifiant $2k \neq n$. Il s'ensuit que $\dfrac{2k\pi}{n} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc $\omega^k \neq 1$. Nous avons ensuite

$$\frac{\omega^k-1}{\omega^k+1} = \frac{e^{2ik\pi/n}-1}{e^{2ik\pi/n}+1} = \frac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n})} = \frac{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}} = \frac{2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3) Remarquons d'abord que i n'est pas solution de (T_n) puisque $(1-i\times i)^n = 2^n \neq 0 = (1+i\times i)^n$. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. On a

$$\begin{aligned}
(1-iz)^n = (1+iz)^n \quad &\iff \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = 1 \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{1+iz}{1-iz} = \omega^k \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad 1+iz = \omega^k(1-iz) \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad iz(\omega^k+1) = \omega^k-1.
\end{aligned}$$

On a alors deux cas possibles :

- Supposons que n est impair. Alors $(1-iz)^n = (1+iz)^n$ si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \dfrac{1}{i}\dfrac{\omega^k-1}{\omega^k+1} = \tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ (puisque $n \neq 2k$). Ainsi (T_n) admet exactement n solutions :

$$\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k \in [\![0, n-1]\!].$$

- Supposons que n est pair. Alors $\omega^{n/2} = -1$ donc $iz(\omega^{n/2}+1) = 0 \neq 2 = \omega^{n/2} - 1$. Par conséquent $(1-iz)^n = (1+iz)^n$ si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!] \backslash \left\{\frac{n}{2}\right\}$ tel que $z = \dfrac{1}{i}\dfrac{\omega^k - 1}{\omega^k + 1} = \tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ (puisque $n \neq 2k$). Ainsi (T_n) admet exactement $n-1$ solutions :
$$\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k \in [\![0, n-1]\!] \backslash \left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

Partie C

(le cas $n = 5$)

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. En développant (à l'aide du binôme de Newton) de chaque côté, on obtient
$$\begin{aligned}
(1-iz)^n = (1+iz)^n \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (iz)^k = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-iz)^k \\
&\iff \quad 1 + 5iz + 10i^2z^2 + 10i^3z^3 + 5i^4z^4 + i^5z^5 \\
&\qquad\quad = 1 - 5iz + 10i^2z^2 - 10i^3z^3 + 5i^4z^4 - i^5z^5 \\
&\iff \quad 5iz - 10iz^3 + iz^5 = -5iz + 10iz^3 - iz^5 \\
&\iff \quad 5iz - 10iz^3 + iz^5 = 0 \\
&\iff \quad iz(z^4 - 10z^2 + 5) = 0, \\
&\iff \quad z^4 - 10z^2 + 5 = 0,
\end{aligned}$$
puisque $iz \neq 0$.

2) Un complexe $z \in \mathbb{C}^*$ est donc solution de (T_5) si et seulement si $Z^2 - 10Z + 5 = 0$ et $Z = z^2$.
Le discriminant du trinôme $X^2 - 10X + 5 = 0$ est $80 = (4\sqrt{5})^2$ donc il admet deux racines réelles $5 - 2\sqrt{5}$ et $5 + 2\sqrt{5}$. Par conséquent $z \in \mathbb{C}^*$ est donc solution de (T_5) si et seulement si $z^2 = 5 - 2\sqrt{5}$ ou $z^2 = 5 + 2\sqrt{5}$ c'est-à-dire si et seulement si
$$z \in \left\{-\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, -\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}.$$
Nous en déduisons que (T_5) admet exactement quatre solutions réelles non nulles. Pour obtenir la cinquième on ajoute la solution évidente 0.

3) Par ailleurs, nous avons montré dans la partie B que (T_5) admet cinq solutions :
$$0 = \tan(0), \quad \tan\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{5}\right).$$
Puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{5\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, nous obtenons que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

4) La formule de duplication de la tangente entraîne que
$$\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}.$$
Par conséquent $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation $\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \dfrac{2x}{1-x^2}$. Cette équation est équivalente à $\sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}x}{1-x^2}$, i.e. $\sqrt{5}\,x^2 + 2x\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 0$. Son discriminant est $4\left(10+2\sqrt{5}\right)$. Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est la racine positive de cette équation, c'est-à-dire
$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

On pourrait s'arrêter là... mais cherchons une forme plus simple. Passons au carré :

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{15+4\sqrt{5}-2\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{5}.$$

Une idée est d'essayer de trouver des entiers a et b tels que $(a+b\sqrt{5})^2 = 70+30\sqrt{5}$. En développant et en identifiant, on trouve que $(a,b)=(5,3)$ fonctionne. Ainsi $\sqrt{70+30\sqrt{5}} = 5+3\sqrt{5}$. Par conséquent

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{15+4\sqrt{5}-10-6\sqrt{5}}{5} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5} = \frac{25-10\sqrt{5}}{25}.$$

Nous en déduisons que $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.

Quelques remarques générales :

- Le DS a été noté sur 35. Le barème est le suivant : 3/9/15/8.

  Les questions de cours ont été hélas ratées pour la plupart d'entre vous. Il faut absolument connaitre toutes les définitions du cours par coeur... d'autant plus qu'elles étaient toutes au programme des deux dernières semaines de colles. Les exercices 2 et 3 ont été traités par la majorité d'entre vous. L'exercice 4 n'a quasiment pas été traité.
- Visiblement beaucoup d'entre vous ne connaissent pas la définition... d'une définition. Il est exclu de répondre à une question demandant une définition (par exemple celle d'une suite convergente) par un théorème (d'après le théorème de la limite monotone, toute suite croissante et majorée converge). C'est comme si je vous demande de me donner la définition d'un pays et que vous me répondez « La France est un pays ».
- Avant de calculer la dérivée d'une fonction en un point, on montre toujours que la fonction en question est dérivable en ce point.
- Lorsqu'on commence à étudier une suite récurrente du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » avec f une fonction qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on commence par justifier que la suite est bien définie. Par exemple, dans l'exercice 3, on commence par justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ (par récurrence immédiate). Cela nous assure de plus que la suite est minorée par 0, ce qui est important pour la partie D.
- Si α est l'unique point fixe d'une fonction $f : I \longrightarrow I$ (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$), alors α est encore un point fixe de $f \circ f$ sur I. Par contre $f \circ f$ peut admettre également d'autres points fixes.

  Par exemple la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet 1 pour unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre $f \circ f$ est l'identité de $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet une infinité de points fixes.
- Déterminer la nature d'une suite signifie déterminer si elle converge ou non (et non étudier ses variations).
- Attention à ne pas invoquer les croissances comparées n'importe quand. On ne les utilise que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée. Dans la question 1 de l'exercice 3, il n'y a aucune forme indéterminée.
- Dire qu'une fonction est définie/continue/dérivable sur un intervalle I comme quotient de deux fonctions qui le sont est un argument incomplet. Il faut ajouter que la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur I.
- Le passage au module n'est pas une opération bijective. Ainsi il est faux en général que $Z^n = 1$ si et seulement si $|Z|^n = 1$ (si $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$).