Correction du DS n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1 : Quelques questions pour commencer

1) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non}(\mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou non}(\mathcal{B})\big) \text{ ou } \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

On a utilisé la commutativité du ou à la troisième équivalence et une loi de Morgan à la quatrième.

2) Pour qu'un réel x vérifie $\sqrt{4-3x}+2x-1>0$, il faut déjà que $\sqrt{4-3x}$ soit bien défini, c'est-à-dire $x \leqslant \dfrac{4}{3}$.
Donnons-nous $x \in \left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right]$.

- Si $x > \dfrac{1}{2}$, alors $2x-1>0$ et donc $\sqrt{4-3x}+2x-1>0$.
- Supposons que $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Alors $1-2x \geqslant 0$ et donc nous avons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{4-3x}+2x-1>0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{4-3x} > 1-2x \\
&\Longleftrightarrow \quad 4-3x > (1-2x)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4-3x > 1-4x+4x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 > 4x^2-x-3.
\end{aligned}$$

Au deuxième équivalent, nous avons utilisé le fait que la fonction carrée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le trinôme du second degré $4X^2-X-3$ admet pour discriminant $\Delta = 49$. Par conséquent il admet deux racines réelles : $\dfrac{1+7}{2\cdot 4} = 1$ et $\dfrac{1-7}{2\cdot 4} = -\dfrac{3}{4}$. Nous en déduisons que $\sqrt{4-3x}+2x-1>0$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{3}{4}, 1\right[$. Puisque $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, cela équivaut à $x \in \left]-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Finalement, nous obtenons que l'ensemble des solutions de $\sqrt{4-3x}+2x-1>0$ est $\left]-\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}\right]$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)$ est bien défini donc $\varphi_a(x) = \exp(x^\alpha \ln(x)) = \exp(e^{\alpha \ln(x)} \ln(x))$ est bien défini. Par ailleurs, puisque $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi_\alpha'(x) = \left(\alpha x^{\alpha-1}\ln(x) + \frac{x^\alpha}{x}\right)\exp(x^\alpha \ln(x)) = x^{\alpha-1}\left(\alpha \ln(x)+1\right) x^{x^\alpha} = x^{\alpha-1+x^\alpha}(\alpha\ln(x)+1).$$

Nous en déduisons que $\varphi_\alpha'(x)$ a le signe de $\alpha \ln(x)+1$.

- Si $\alpha = 0$, alors $\varphi_\alpha'(x) \geqslant 0$ (mais plus simplement, si $\alpha=0$, alors $x^{x^\alpha} = x^1 = x$).
- Si $\alpha > 0$, alors $\varphi_\alpha'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant e^{-1/\alpha}$.
- Si $\alpha < 0$, alors $\varphi_\alpha'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant e^{-1/\alpha}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sin(9x) = \cos(2x) - \sin(5x) \quad &\iff \quad \sin(9x) + \sin(5x) = \cos(2x) \\
&\iff \quad 2\sin\left(\frac{9x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right) = \cos(2x) \\
&\iff \quad 2\sin(7x)\cos(2x) = \cos(2x) \\
&\iff \quad 2\cos(2x)\left(\sin(7x) - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \quad \begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ \text{ou} \quad \sin(7x) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \cos(2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{ou} \quad \sin(7x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} 2x \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou} \quad 7x \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 7x \equiv \pi - \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[\pi] \\ \text{ou} \quad x \equiv \dfrac{\pi}{42}\left[\dfrac{2\pi}{7}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \dfrac{5\pi}{42}\left[\dfrac{2\pi}{7}\right] \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \text{ou} \quad x \equiv \dfrac{\pi}{42}\left[\dfrac{2\pi}{7}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \dfrac{5\pi}{42}\left[\dfrac{2\pi}{7}\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

5) On a $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Ensuite

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/3}.$$

Ainsi un argument de z est $-\dfrac{\pi}{3}$. Ensuite $z' = i - 1 = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ donc le module de z' est $\sqrt{2}$ et un argument $\dfrac{3\pi}{4}$.

Nous en déduisons que $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{3i\pi/4}} = 2e^{i\pi(-1/3-3/4)} = 2e^{-13i\pi/12}$. Ainsi le module de $\dfrac{z}{z'}$ est 2 et un argument est $-\dfrac{13\pi}{12}$.

Exercice 2 : Quelques calculs de sommes

---

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!}\,\frac{6^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k 6^{n-k} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k 6^{n-k} - 3^0 6^{n-0}\right) = \frac{1}{n!}\Big((3+6)^n - 6^n\Big) = \frac{9^n - 6^n}{n!},$$

d'après la formule du binôme de Newton.

2) Fixons $p \in \mathbb{N}$. Montrons la formule par récurrence sur $n \geqslant p$ (à p fixé donc).

- *Initialisation :* On a $\displaystyle\sum_{i=p}^{p}\binom{i}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ donc la formule est vraie au rang p.

- *Hérédité :* Supposons que la formule soit vraie au rang n pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à p. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a

$$\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p},$$

  d'après l'hypothèse de récurrence. Or la formule du triangle de Pascal entraîne que

$$\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

  Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geqslant p$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On commence par décomposer selon que $i<j$, $j<i$ ou $i=j$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^{\min(i,j)} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{i=1}^{n} 2^{\min(i,j)} \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{i} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} 2^{j} + \sum_{i=1}^{n} 2^{i} = 2 \times \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{i} + \sum_{i=1}^{n} 2^{i}.\end{aligned}$$

On remarque en effet qu'échanger les indices i et j dans la première somme la rend égale à la deuxième somme. Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^{i}\right) + 2\frac{1-2^{n}}{1-2} &= 2\sum_{j=2}^{n}\left(2\frac{1-2^{j-1}}{1-2}\right) + 2(2^{n}-1) \\ &= 2\sum_{j=2}^{n}\left(2^{j}-2\right) + 2^{n+1} - 2 \\ &= 2\sum_{j=2}^{n} 2^{j} - 4(n-1) + 2^{n+1} - 2.\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} 2^{j} = \sum_{j=0}^{n} 2^{j} - 2^{0} - 2^{1} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+1} - 4$ si bien que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2^{n+2} - 8 - 4n + 4 + 2^{n+1} - 2 = (2+1)2^{n+1} - 4n - 5 = 3\cdot 2^{n+1} - 4n - 6.$$

Exercice 3 : Une étude de fonction

Partie A

1) La fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ est définie sur $]-\infty, 1[$. La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$. Par conséquent la fonction f est définie sur $D_f =]-1, 1[$.

2) Soit $x \in D_f$. Nous avons $-x \in D_f$ et $f(-x) = \dfrac{1}{2}(1+x)\ln(1+x) + \dfrac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) = f(x)$. Ainsi f est paire sur D_f.

3) a) Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} y\ln(y) = 0$.

   b) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} y\ln(y) = 0$, on a $\displaystyle\lim_{y\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = 0$. De plus, par continuité, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1+x)\ln(1+x) = 2\ln(2)$. Nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$.
   Puisque f est paire, nous obtenons que $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \ln(2)$.

4) a) Les fonctions $x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto 1+x$ sont dérivables sur $]-1,1[$ et sont à valeurs strictement positives. Puisque $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que les fonctions $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ sont dérivables sur $]-1,1[$. Ainsi f est dérivable sur $D_f =]-1,1[$.

b) Pour tout $x \in D_f$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) - 1 + \ln(1+x) + 1\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Partie B

Même si ce n'est pas écrit dans l'énoncé, il faut d'abord commencer par dire que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $x \longmapsto (e^x - e^{-x})$ et $x \longmapsto (e^x + e^{-x})$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} \neq 0$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -g(x)$. Ainsi g est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$g(x) - 1 = \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} < 0$$

donc $g(x) < 1$. On a aussi

$$g(x) + 1 = \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}} > 0$$

donc $g(x) > -1$. Par conséquent g est bornée strictement par 1

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$ si bien que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
Puisque f est impaire sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

4) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est le quotient d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^x - (-e^{-x}))(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + (-e^{-x}))}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - g^2(x). \end{aligned}$$

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| < 1$ d'après la question 2. Par conséquent $g^2(x) \leqslant 1$ et donc $g'(x) = 1 - g^2(x) \geqslant 0$. Nous en déduisons que g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dressons son tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	1

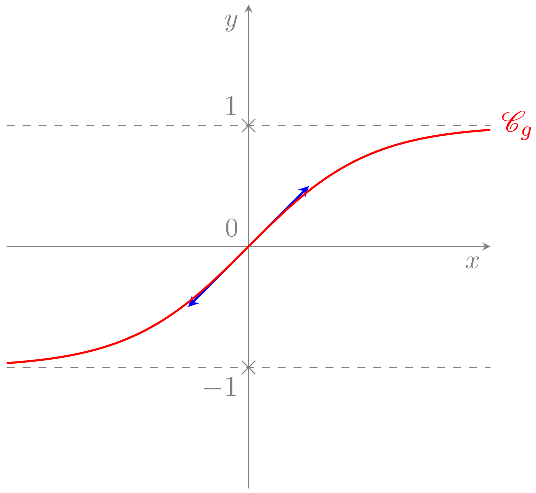
Nous avons utilisé le fait que g est impair pour affirmer que $g(0) = 0$.

On a $g'(0) = 1 - g^2(0) = 1$ si bien que la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de f en 0. Remarquons aussi que les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales à la courbe en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.

Pour nous aider à tracer la courbe, puisque la calculatrice est interdite, mais comme le professeur a gentiment rappelé quelques approximations, on peut calculer des valeurs approchées de valeurs remarquables :

$$g(1) = \frac{e - 1/e}{e + 1/e} \approx \frac{2,35}{3,09} \approx \frac{2,34}{3} = 0,78.$$

Traçons sa courbe représentative dans un repère orthonormé conformément aux instructions :



6) Nous déduisons du tableau de variations que tout réel de $]-1, 1[$ admet un unique antécédent par g. Plus rigoureusement c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires (forme faible du théorème de la bijection) puisque la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

   Nous en déduisons que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Partie C

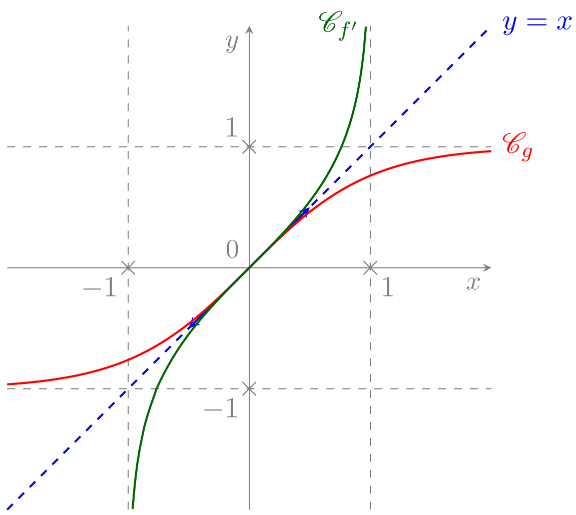
1) Soient $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
y = f'(x) \quad & \iff \quad 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
& \iff \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\
& \iff \quad e^{2y}(1-x) = 1 + x \\
& \iff \quad e^{2y} - 1 = x(e^{2y} + 1) \\
& \iff \quad x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\
& \iff \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = g(y).
\end{aligned}$$

   A la deuxième équivalence, nous avons utilisé le fait que $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$. A la cinquième équivalence, nous avons utilisé le fait que $e^{2y} + 1 \neq 0$.

2) Nous en déduisons que f' est une bijection de $D_f =]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$. De plus f' est la bijection réciproque de g. Ainsi sa courbe représentative est symétrique de celle de g par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) Superposons la courbe représentative de f' à celle de g :

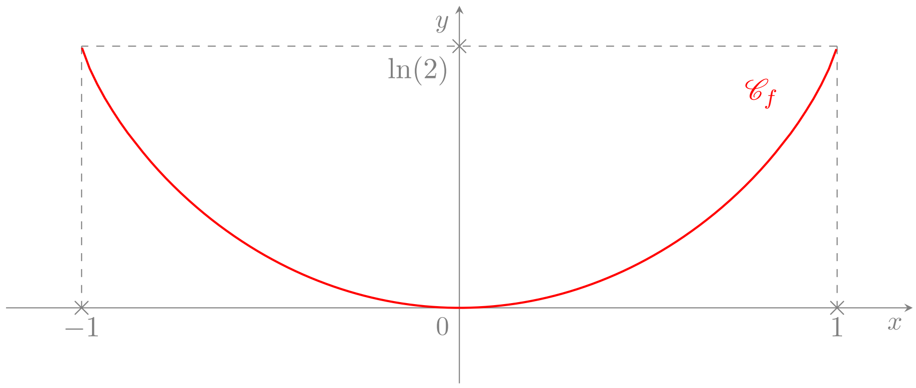


4) Soit $x \in D_f$. Puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nous avons $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $g(f'(x)) \geqslant g(0)$. Or $g(0) = 0$ et, puisque g et f' sont des bijections réciproques, on a $g(f'(x)) = x$. Finalement $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.

5) D'où le tableau de variations de f :

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\ln(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$

Nous avons calculé $f(0) = \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(1) = 0$. Traçons la courbe représentative de f :



Partie D (bonus)

6) Soient a et b des réels. On a :

$$\begin{aligned}
g(a) + g(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} + \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \\
&= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})} \\
&= \frac{e^a e^b - e^{-a} e^b + e^a e^{-b} - e^{-a} e^{-b} + e^a e^b + e^{-a} e^b - e^a e^{-b} - e^{-a} e^{-b}}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})} \\
&= \frac{2e^a e^b - 2e^{-a} e^{-b}}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})} = \frac{2(e^{a+b} - e^{-(a+b)})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
1+g(a)g(b) &= \frac{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b})}{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})} \\
&= \frac{e^ae^b+e^{-a}e^b+e^ae^{-b}+e^{-a}e^{-b}+e^ae^b-e^{-a}e^b-e^ae^{-b}+e^{-a}e^{-b}}{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})} \\
&= \frac{2e^ae^b+2e^{-a}e^{-b}}{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})} = \frac{2(e^{a+b}+e^{-(a+b)})}{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{g(a)+g(b)}{1+g(a)g(b)} = \frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}}{e^{a+b}+e^{-(a+b)}} = g(a+b).$$

7) Plusieurs formules sur les fonctions th et $\tan$ sont analogues :

- D'après les formules d'Euler, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $i\tan(x) = \dfrac{2i\sin(x)}{2\cos(x)} = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$.
- Pour tout réel x n'étant pas congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$.
- Pour tous réels a et b tels que a, b et $a+b$ ne sont pas congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Exercice 4 : inégalité arithmético-géométrique

1) Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

D'où l'inégalité annoncée. Par ailleurs il y a égalité si et seulement si $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0$, c'est-à-dire $a=b$.

2) Soient a, b, c et d des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité de la question précédente à $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$, on obtient :

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}.$$

Puisque $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{cd} \leqslant \dfrac{c+d}{2}$, nous en déduisons que

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

3) Soient a, b et c des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité de la question précédente à a, b, c et $\frac{a+b+c}{3}$, on obtient :

$$\sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}} \leqslant \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}.$$

Par conséquent

$$(abc)^{1/4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4} \leqslant \frac{3a+3b+3c+a+b+c}{12} = \frac{a+b+c}{3}.$$

En divisant par le réel strictement positif $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4}$, nous obtenons

$$(abc)^{1/4} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1-1/4} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4}.$$

Puisque la fonction $x \longmapsto x^{4/3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons

$$\sqrt[3]{abc} = (abc)^{1/3} = \left((abc)^{1/4}\right)^{4/3} \leqslant \left(\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4}\right)^{4/3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

4) a) Notons $\psi : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$. Il s'agit d'une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \geqslant x.$$

Nous en déduisons que ψ est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, $\psi(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$. Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ avec $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Nous avons

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{m} nm - n = n - n = 0.$$

c) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{x_k}{m}$ est un réel strictement positif donc la question 4a entraîne que $\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \frac{x_k}{m} - 1$. En sommant ces inégalités, nous obtenons $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = 0$.

Nous en déduisons que $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_k}{m}\right) \leqslant 0$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_k}{m} \leqslant \exp(0) = 1$. En multipliant par le réel strictement positif m^n, nous obtenons $\prod_{i=1}^{n} x_k \leqslant m^n$. Enfin puisque la fonction racine n-ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_k} \leqslant m$. D'où l'inégalité arithmético-géométrique.

5) Appliquons l'inégalité avec $x_k = k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Nous obtenons finalement $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Voilà c'est fini... et ce n'était que le premier !