# Devoir surveillé n° 1

**jeudi 28 septembre 2017**

*La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.*

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

*Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.*

*Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.*

*Encadrez ou soulignez les résultats principaux.*

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation.*

*N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

*Pour vous aider à tracer des courbes dans l'exercice 3, je vous rappelle quelques approximations :*

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \qquad \sqrt{3} \approx 1,73 \qquad \ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad e \approx 2,72 \qquad e^{-1} \approx 0,37.$$

## Exercice 1 : Quelques questions pour commencer

1) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Montrer que $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$ sont deux propositions équivalentes.
2) Résoudre l'inéquation $\sqrt{4-3x} + 2x - 1 > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\varphi_\alpha : x \longmapsto x^{x^\alpha}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer le signe de $\varphi_\alpha'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4) Résoudre l'équation $\sin(9x) = \cos(2x) - \sin(5x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
5) Calculer le module et un argument des complexes $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ et de $z' = i - 1$. En déduire le module et un argument du complexe $\dfrac{z}{z'}$.

## Exercice 2 : Quelques calculs de sommes

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!} \, \frac{6^{n-k}}{(n-k)!}$.
2) Soient $p$ et $n$ deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que
$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
3) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)}$

## Exercice 3 : Une étude de fonction

*Les parties A et B sont indépendantes. Si vous ne parvenez pas à répondre à une question, n'hésitez pas à admettre le résultat et passer aux questions suivantes.*

### Partie A

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)$.

1) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de la fonction $f$.
2) Étudier la parité de $f$ sur $D_f$.
3) a) Rappeler $\lim_{y \to 0^+} y\ln(y)$.
   b) En déduire que $f$ admet des limites finies (que l'on précisera) aux extrémités de $D_f$.
4) a) Montrer que $f$ est dérivable sur $D_f$.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

### Partie B

Considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1) Étudier la parité de $g$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $g$ est bornée par $1$ sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
   *Indice : on pourra essayer de factoriser le numérateur et le dénominateur de $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, par un même terme.*
4) Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - g^2(x)$.
5) Dresser le tableau de variations de $g$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on fera en sorte que la zone graphique soit un carré de longueur $4$ dont le centre est l'origine du repère).
6) Montrer que tout réel de $]-1, 1[$ admet un unique antécédent par $g$. Que peut-on en déduire sur la fonction $g$ ?

### Partie C

1) Soient $x \in ]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $y = f'(x)$ si et seulement si $x = g(y)$.
2) Que peut-on en déduire sur les courbes représentatives de $f'$ et $g$ ?
3) Superposer la courbe représentative de $f'$ à celle de $g$ (tracée à la question B5).
4) Soit $x \in D_f$. Déduire de la question C1 que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$.
5) Dresser le tableau de variations de $f$ et tracer sa courbe représentative.

### Partie D (bonus)

*Ne traitez cette partie que si vous avez traité tout le reste du sujet.*

6) Montrer que, pour tous réels $a$ et $b$,

$$g(a+b) = \frac{g(a) + g(b)}{1 + g(a)g(b)}.$$

7) La fonction $g$ est appelée tangente hyperbolique (et notée $\mathrm{th}$). Quelles formules vérifiées par $g$ se rapprochent de celles de la fonction tangente ?

1) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$. Étudier le cas d'égalité.

2) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt[4]{abcd} \leqslant \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

   *On pourra appliquer l'inégalité de la question précédente à $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$.*

3) Soient $a$, $b$ et $c$ des réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

   *On pourra appliquer l'inégalité de la question précédente à $a$, $b$, $c$ et $\frac{a+b+c}{3}$.*

4) Le but de cette question est de montrer que, plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

   Cette inégalité (appelée inégalité arithmético-géométrique) affirme que la moyenne géométrique de $x_1, \ldots, x_n$ est inférieure à la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.

   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

   b) Notons $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = 0$.

   c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant 0$ et conclure.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.