Correction du DM n° 9

Exercice 1 : Intégrales de Wallis et intégrales Gaussiennes

Partie A : Premières propriétés des intégrales de Wallis

Commençons par préciser que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ si bien que l'intégrale W_n existe.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ (avec « $dt = -dx$ ») :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = W_n.$$

2) On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et n'est pas identiquement nulle si bien que $W_n > 0$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties avec $u = \sin^n$ et $v = -\cos$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u' = n\cos\sin^{n-1}$ et $v' = \sin$ et

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\,dt = [-\sin^n(t)\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -n\cos^2(t)\,\sin^{n-1}(t)\,dt.$$

Puisque $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient

$$W_{n+1} = -\sin^n\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^n(0)\cos(0) + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-1}(t) - \sin^{n+1}(t)\right)dt = nW_{n-1} - nW_{n+1},$$

par linéarité de l'intégrale. Par conséquent $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \dfrac{W_{(2n+1)+1}}{W_{(2n+1)-1}} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ donc, par produit télescopique,

$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+2}}{W_{2k}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

Le produit ci-dessus est le produit de tous les termes impairs de 1 à $2n-1$. Si on le multiplie par le produit des termes pairs, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$, alors on obtient $(2n)!$. Ainsi

$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

D'où la formule puisque $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{W_{2n+3}}{W_{2n+1}} = \dfrac{W_{(2n+2)+1}}{W_{(2n+2)-1}} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$ donc, de même,

$$W_{2n+1} = \frac{W_{2n+1}}{W_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+3}}{W_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = (2^n n!)^2 \prod_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie B : Étude asymptotique des intégrales de Wallis

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(\theta) \in [0,1]$ donc $\sin^n(\theta) \geqslant \sin^{n+1}(\theta)$. Ainsi

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt = W_{n+1}.$$

Ainsi $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) si bien qu'elle converge.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question 4a de la partie A entraîne que

$$(n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_nW_{n+1}.$$

Ainsi la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Par ailleurs son terme initial est $W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi la suite est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. Ainsi $\dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$ et donc $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$. Puisque $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème d'encadrement entraîne que $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\sqrt{n}W_n)^2 = nW_n^2 = nW_nW_{n-1}\,\frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{W_n}{W_{n-1}}.$$

Ainsi $(\sqrt{n}W_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\sqrt{n}\,W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

On sait que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qui est positif (puisque $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Si $\ell \neq 0$ alors, par produit de limites, $\sqrt{n}\,W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell = 0$.

4) On a $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{2\,4^n(n!)^2}{\pi(2n)!} = \frac{2n}{\pi(2n+1)}\,\frac{1}{n}\left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)^2.$$

Puisque $\dfrac{\pi(2n+1)}{2n}\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$, nous en déduisons que $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$. D'où la formule de Wallis en passant à la racine.

Partie C : Intégrales Gaussiennes (avant l'heure)

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On utilise la célèbre inégalité : $1 + x \leqslant e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, n]$, on a :

- $0 \leqslant 1 - \dfrac{t}{n} \leqslant e^{-t/n}$ donc, puisque $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.
- $0 \leqslant 1 + \dfrac{t}{n} \leqslant e^{t/n}$ donc, puisque $x \longmapsto x^{-n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n} \geqslant e^{-t}$.

2) Pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a $t^2 \in [0, n]$ si bien que $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$. De plus les fonctions $t \longmapsto \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ et $t \longmapsto \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$ sont continues sur $[0, \sqrt{n}]$. Par conséquent $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$

3) Faisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans l'intégrale de gauche (on a « $dt = -\sqrt{n}\sin(u)\,du$ », $\sqrt{n} = \sqrt{n}\cos(0)$ et $0 = \sqrt{n}\cos(\frac{\pi}{2})$) :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(u)\right)^n (-\sqrt{n})\sin(u)\,du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,du = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Faisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(v)$ dans l'intégrale de droite (la fonction $\sqrt{n}\tan$ est une bijection de classe C^1 de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$ et on a « $dt = \sqrt{n}(1+\tan^2(v))\,dv$ », $\sqrt{n} = \sqrt{n}\tan(\frac{\pi}{4})$ et $0 = \sqrt{n}\tan(0)$) :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(v)\right)^{-n} \sqrt{n}(1+\tan^2(v))\,dv = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(v))^{1-n}\,dv.$$

Puisque $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(v)\,dv \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Ainsi $\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant G_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$.

4) Nous avons

- $\sqrt{2n+1}\,W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{n}{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\,\sqrt{2n+1}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- De même $\sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\dfrac{n}{2n-2}}\,\sqrt{2n-2}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par encadrement, nous obtenons que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ et $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^x e^{-t^2/2}\,dt$

a) La fonction G est la primitive de $g : t \longmapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $G' = g \geqslant 0$. Ainsi G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,x]$, on a $e^{-t^2} \leqslant 1$ donc $G(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n 1\,dt \leqslant x \leqslant 1$.
- Soit $x \in [1,+\infty[$. Pour tout $t \in [1,x]$, on a $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ donc

$$G(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt \leqslant G(1) + \int_1^x e^{-t}\,dt \leqslant 1 + \left[-e^{-t}\right]_1^x = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leqslant 2.$$

Ainsi G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b) Puisque G est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de la limite monotone entraîne que G converge vers un réel ℓ en $+\infty$. Puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nous obtenons que $G(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Mais nous avons montré que $G(\sqrt{n}) = G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi G converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ en $+\infty$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par parité de $t \longmapsto e^{-t^2/2}$, $F(x) = 2\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$. Faisons alors le changement de variable $t = u\sqrt{2}$ (avec « $dt = \sqrt{2}du$ ») :

$$F(x) = 2\int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du = 2\sqrt{2}G\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

d) Ainsi F admet $2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$ pour limite en $+\infty$.

1) On a $(X+1)^2(X+2) = X^3+4X^2+5X+2$ puis

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & & & & & X^5 & - & 1 & & X^3 + 4X^2 + 5X + 2 \\ \cline{10-10}
- & (X^5 & + & 4X^4 & + & 5X^3 & + & 2X^2) & & X^2 - 4X + 11 \\ \cline{1-8}
- & 4X^4 & - & 5X^3 & - & 2X^2 & - & 1 & & \\
+ & (4X^4 & + & 16X^3 & + & 20X^2 & + & 8X) & & \\ \cline{1-8}
 & 11X^3 & + & 18X^2 & + & 8X & - & 1 & & \\
- & (11X^3 & + & 44X^2 & + & 55X & + & 22) & & \\ \cline{1-8}
 & & - & 26X^2 & - & 47X & - & 23 & &
\end{array}
$$

Ainsi $X^5-1 = Q(X+1)^2(X+2)+R$ avec $Q = X^2-4X+11$ et $R = -26X^2-47X-23$.

2) On a

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2} &= \frac{a(x+1)(x+2)+b(x+2)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{a(x^2+3x+2)+b(x+2)+c(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x+2)} \\
&= \frac{x^2(a+c)+x(3a+b+2c)+2a+2b+c}{(x+1)^2(x+2)}
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{cases} a + c = -26 \\ 3a + b + 2c = -47 \\ 2a + 2b + c = -23 \end{cases}
\iff
\begin{cases} a + c = -26 \\ b - c = 31 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2b - c = 29 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases} a + c = -26 \\ b - c = 31 \\ c = -33 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}
\iff
\begin{cases} c = -33 \\ b = -2 \\ a = 7 \end{cases}
$$

Nous en déduisons que

$$
\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}, \qquad \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{7}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{33}{x+2}.
$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$, on a

$$
\frac{x^5-1}{(x+1)^2(x+2)} = Q(x) + \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = x^2-4x+11+\frac{7}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{33}{x+2}.
$$

Ainsi une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^5-1}{(x+1)^2(x+2)}$

- sur $]-\infty,-2[$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 11x + 7\ln(-x-1) + \dfrac{2}{x+1} - 33\ln(-x-2)$.
- sur $]-2,-1[$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 11x + 7\ln(-x-1) + \dfrac{2}{x+1} - 33\ln(x+2)$.
- sur $]-1,+\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 11x + 7\ln(x+1) + \dfrac{2}{x+1} - 33\ln(x+2)$.