Devoir maison n^o 9

À rendre le mardi 16 janvier 2018

L'exercice 1 de ce DM n'est en aucun cas facultatif. Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet. Veuillez encadrer ou souligner les résultats principaux.

Exercice 1 : Intégrales de Wallis et intégrales Gaussiennes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$.

Partie A : Premières propriétés des intégrales de Wallis

1) En effectuant un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = W_n$.
2) Calculer W_0 et W_1.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$.
5) A l'aide de produits télescopiques, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie B : Étude asymptotique des intégrales de Wallis

1) a) Étudier les variations de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) En déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Déduire des questions précédentes (et de la question 4 de la partie A) que :
   a) la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la constante).
   b) $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (*on utilisera la monotonie de* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
3) En déduire que $\sqrt{n}\, W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et que $W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4) Montrer la formule de Wallis : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$.

Partie C : Intégrales Gaussiennes (avant l'heure)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $G_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt$.

1) Montrer soigneusement que, pour tout $t \in [0, n]$, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$.
2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant G_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.
3) En faisant les changements de variables $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans l'intégrale de gauche et $t = \sqrt{n}\tan(v)$ dans l'intégrale de droite, montrer que

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leqslant G_n \leqslant \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

4) En déduire que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers une limite à préciser).

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ et $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^x e^{-t^2/2}\,dt$

   a) Étudier les variations de la fonction G sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer que G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   On pourra utiliser le fait que $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ pour tout $t \geqslant 1$.

   b) En déduire que G admet $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ pour limite en $+\infty$.

   c) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x)$ en fonction de $G(x)$.

   d) Montrer que F admet $\sqrt{2\pi}$ pour limite en $+\infty$.

Très bientôt, nous étudierons les intégrales généralisées. On posera alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$.
Cette intégrale joue un rôle fondamental en mathématiques, notamment en théorie des probabilités.

Exercice 2 : Polynômes, systèmes et primitives (facultatif)

1) Déterminer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de $X^5 - 1$ par $(X+1)^2(X+2)$.

2) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, -2\}, \qquad \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}.$$

   On se ramènera à un système de trois équations d'inconnues a, b et c que l'on mettra sous forme échelonnée via la méthode du pivot de Gauss.

3) En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^5 - 1}{(x+1)^2(x+2)}$ (sur des intervalles à préciser).