Correction du DM n° 8

Exercice 1 : Intégrales en vrac

1) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_1 : t \longmapsto e^t$ et $v_1 : t \longmapsto \cos(t)$ de classe C^1 sur $[\min(0,x), \max(0,x)]$. On a $u_1' : t \longmapsto e^t$ et $v_1' : t \longmapsto -\sin(t)$ et

$$\int_0^x e^t \cos(t)\, dt = \big[e^t \cos(t)\big]_0^x - \int_0^x e^t(-\sin(t))\, dt = e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t)\, dt.$$

Faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_2 : t \longmapsto e^t$ et $v_2 : t \longmapsto \sin(t)$ de classe C^1 sur $[\min(0,x), \max(0,x)]$. On a $u_2' : t \longmapsto e^t$ et $v_2' : t \longmapsto \cos(t)$ et

$$\int_0^x e^t \sin(t)\, dt = \big[e^t \sin(t)\big]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t)\, dt = e^x \sin(x) - \int_0^x e^t \cos(t)\, dt.$$

Ainsi

$$\int_0^x e^t \cos(t)\, dt = e^x\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - 1 - \int_0^x e^t \cos(t)\, dt$$

et donc

$$\int_0^x e^t \cos(t)\, dt = \frac{1}{2} e^x\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - \frac{1}{2}.$$

2) La fonction $x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $[1/2, 2]$ donc l'intégrale I est bien définie. Effectuons le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ (avec $x = \dfrac{1}{y}$ et « $dx = \dfrac{-dy}{y^2}$ ») dans l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$. On obtient :

$$\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_2^1 \frac{\frac{1}{y}\ln(\frac{1}{y})}{(1+(\frac{1}{y})^2)^2} \frac{-dy}{y^2} = \int_2^1 \frac{\ln(y)}{y^3(1+(\frac{1}{y})^2)^2}\, dy = \int_2^1 \frac{\ln(y)}{y^3 \frac{1}{y^4}(y^2+1)^2}\, dy$$

et donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx = -\int_1^2 \frac{y\ln(y)}{(1+y^2)^2}\, dy$. Finalement la relation de Chasles entraîne que

$$I = \int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_1^2 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx = -\int_1^2 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_1^2 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$$

3) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}}$ est continue sur $[1, 3]$ donc son intégrale est bien définie. Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (avec $t = \dfrac{1}{u^2}$ et « $dt = \dfrac{-2}{u^3}\, du$ ») :

$$\int_1^3 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}} = \int_1^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(\frac{1}{u^2})^2 e^u} \frac{-2}{u^3}\, du = -2\int_1^{1/\sqrt{3}} u e^{-u}\, du = 2\int_{1/\sqrt{3}}^1 u e^{-u}\, du.$$

Faisons une intégration par parties avec les fonctions $f : u \longmapsto -e^{-u}$ et $g : u \longmapsto u$ de classe C^1 sur $[1/\sqrt{3}, 1]$. On a $f' : u \longmapsto e^{-u}$ et $g' : u \longmapsto 1$ et

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 u e^{-u}\, du = \big[-u e^{-u}\big]_{1/\sqrt{3}}^1 - \int_{1/\sqrt{3}}^1 -e^{-u}\, du = -e^{-1} + \frac{e^{-1/\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \big[-e^{-u}\big]_{1/\sqrt{3}}^1 = -\frac{2}{e} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{-1/\sqrt{3}}.$$

Ainsi

$$\int_1^3 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}} = -\frac{4}{e} + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{-1/\sqrt{3}}.$$

4) a) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. Posons $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a

$$1 + u^2 = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

donc

$$\frac{2u}{1+u^2} = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x).$$

b) Effectuons le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (avec « $du = \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{dx}{2}$ » donc « $dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$ ») :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int_{\tan(0)}^{\tan(\pi/4)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2+2u}\,du = \int_0^1 \frac{2}{(1+u)^2}\,du.$$

Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin(x)} = \left[\frac{-2}{1+u}\right]_0^1 = \frac{-2}{2} + \frac{2}{1} = 1.$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

La fonction $t \longmapsto t^2\sin(t)$ est continue sur $[0,1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 t^2 \sin(t)\,dt.$$

Calculons cette intégrale à l'aide de l'intégration par parties avec $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto -\cos(t)$ de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $u' : t \longmapsto 2t$ et $v' : t \longmapsto \sin(t)$ et

$$\int_0^1 t^2\sin(t)\,dt = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^1 - \int_0^1 2t(-\cos(t))\,dt = -\cos(1) + 2\int_0^1 t\cos(t)\,dt.$$

Réalisations ensuite une nouvelle intégration par parties avec $f : t \longmapsto t$ et $g : t \longmapsto \sin(t)$ de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $f' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \cos(t)$ et

$$\int_0^1 t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)\,dt = \sin(1) - [-\cos(t)]_0^1 = \sin(1) + \cos(1) - 1.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k}{n}\right) = -\cos(1) + 2(\sin(1)+\cos(1)-1) = 2\sin(1) + \cos(1) - 2.$$

Exercice 2 : Fonction exponentielle

Cf. paragraphe I3 du chapitre hors-série : *Exponentielle et logarithme népérien*