Devoir maison n° 8

À rendre le mercredi 10 janvier 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Intégrales en vrac

1) En faisant deux intégrations par parties consécutives, calculer $\displaystyle\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Dans l'exercice 4 du TD n° 14, on a montré avec un long calcul que $I = \displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$. Cette valeur bien particulière nous laisse penser qu'il y avait sans doute plus simple pour calculer cette intégrale. Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ et retrouver que $I = 0$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ puis d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}}$.

4) a) Soit $x \in \left]-\pi,\pi\right[$. Montrer que, si $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

   b) En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 2 : Fonction exponentielle

L'objectif de ce problème est de montrer l'existence de la fonction exponentielle ainsi que ses propriétés usuelles.

La partie A est consacrée à la démonstration de trois résultats préliminaires que nous aurons besoin d'utiliser régulièrement dans la suite. Dans la partie B, nous nous attacherons à montrer l'existence de la fonction exponentielle comme limite d'une suite de fonctions. La partie C consiste à montrer une à une les propriétés usuelles de la fonction exponentielle.

⚠ Bien entendu, aucun résultat sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien ne doit être utilisé (nous allons tout redémontrer). Pour éviter cette tentation, nous appellerons la fonction exponentielle φ dans le problème.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > |x|$, posons $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

Partie A : préliminaires

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la propriété $\quad (P_n) \quad : \quad \forall y \in \left]-1,+\infty\right[, \qquad 1 + ny \leqslant (1+y)^n.$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la propriété $\quad (Q_n) \quad : \quad \forall y \in \left]-1,\dfrac{1}{n}\right[, \qquad (1+y)^n \leqslant \dfrac{1}{1-ny}.$

3) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $ns_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   a) Montrer que, pour tout n assez grand, $ns_n \leqslant (1+s_n)^n - 1 \leqslant \dfrac{ns_n}{1-ns_n}$.

   b) En déduire que $(1+s_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie B : convergence des deux suites

Donnons-nous $x \in \mathbb{R}$ et posons $n_x = \lfloor |x| \rfloor + 1$.

1) a) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_x$, $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$.

   b) A l'aide de la propriété la propriété (P_{n+1}), en déduire que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ est croissante.

2) En remarquant que pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$, montrer que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ est décroissante.

3) a) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_x$, $1 - \dfrac{x^2}{n} \leqslant \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$.

   b) En déduire que $u_n(x) - v_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4) En déduire que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ convergent vers une même limite.
   On la note $\varphi(x)$.

Partie C : étude de la fonction φ

Les propriétés de la fonction φ découlent des propriétés des suites $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ par passage à la limite.

1) Montrer que la fonction φ vérifie les propriétés suivantes :

   a) $\varphi(0) = 1$.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ (*on pourra utiliser la croissance de la suite* $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$).

   c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(-x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

   d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 1 + x$.

   e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

2) Donnons-nous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Montrer que $\dfrac{u_n(x+y)}{u_n(x)u_n(y)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

   b) En déduire que $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ puis que $\varphi(x-y) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$.

   c) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$
   (*on distinguera les cas où* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$).

3) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Montrer que $\varphi(y - x) > 1$.

   b) En déduire que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que, pour tout $h \in \left]-1, 1\right[$, $1 + h \leqslant \varphi(h) \leqslant \dfrac{1}{1-h}$.

   b) En déduire que φ est continue en 0.

   c) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) a) A l'aide d'un encadrement, montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(h) - 1}{h} = 1$.

   b) En déduire que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$.

   c) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi' = \varphi$.

   d) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que $f = \varphi$
   (*on pourra étudier la fonction* $g = \dfrac{f}{\varphi}$).

   e) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

Ainsi φ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la valeur en 0 est 1 et dont la dérivée est égale à elle-même. La fonction φ est appelée fonction exponentielle. On la note $\exp$. Le nombre $\exp(1)$ est noté simplement e. Sa réciproque est appelée fonction logarithme népérien et notée $\ln$.