Correction du DM n° 7

Exercice 1

1) Soit $c \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction constante égale à c vérifiant $(*)$, alors $c = \dfrac{2c}{1+c^2}$ donc $c = 0$ ou $1 + c^2 = 2$ et donc $c \in \{-1, 0, 1\}$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions constantes égales à -1, à 0 ou à 1 sont solutions.

2) Supposons qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) = 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = f(x - y_0 + y_0) = \frac{f(x-y_0) + f(y_0)}{1 + f(x-y_0)f(y_0)} = \frac{f(x-y_0)+1}{1+f(x-y_0)} = 1.$$
Ainsi f est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(z_0) = -1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = f(x - z_0 + z_0) = \frac{f(x-z_0) + f(z_0)}{1 + f(x-z_0)f(z_0)} = \frac{f(x-z_0)-1}{1-f(x-z_0)} = -1.$$
Ainsi f est constante égale à -1 sur $\mathbb{R}$.

Supposons que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie $(*)$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \qquad (**)$$
Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|1 + a^2| - |2a| = (1 - |a|)^2 \geqslant 0$ si bien que $\left|\dfrac{2a}{1+a^2}\right| \leqslant 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$. Enfin puisque f est non constante, elle ne peut pas prendre les valeurs 1 et -1 et donc l'inégalité est stricte.

On a $f(0) = f(0+0) = \dfrac{f(0)+f(0)}{1+f^2(0)}$ donc $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque f est non constante, elle ne peut pas prendre les valeurs 1 et -1. Ainsi $f(0) = 0$.

4) Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \longmapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Dérivons-là :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = \frac{f'(y)\big(1 + f(x)f(y)\big) - f'(y)f(x)\big(f(x)+f(y)\big)}{\big(1+f(x)f(y)\big)^2} = \frac{f'(y) - f'(y)f^2(x)}{\big(1+f(x)f(y)\big)^2}.$$
En particulier, pour $y = 0$, on obtient $f'(x) = \dfrac{f'(0) - f'(0)f^2(x)}{\big(1+f(x)f(0)\big)^2} = c(1 - f^2(x))$, avec $c = f'(0)$. Nous obtenons également que $c \neq 0$ sinon f' serait nulle sur $\mathbb{R}$ et donc f serait constante (ce qui est exclu).

5) Puisque $c \neq 0$ et $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que f' est strictement positive ou strictement négative (selon le signe de c) sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est strictement monotone. De plus f est continue (car dérivable) donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$. Par ailleurs la fonction f est bornée et, comme elle est monotone, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle admet une limite finie ℓ en $-\infty$ et une limite finie ℓ' en $+\infty$. En faisant tendre x vers $-\infty$ ou $+\infty$ dans $(**)$ on obtient que $\ell \in \{-1, 0, 1\}$ et $\ell' \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement monotone, nous obtenons que $\ell = -\ell' = 1$ ou $\ell' = -\ell = 1$. Ainsi $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

6) La fonction f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et que

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{c\big(1-f^2(f^{-1}(y))\big)} = \frac{1}{c(1-y^2)}.$$

La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad g'(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{-1}{1-y} = \frac{2}{1-y^2}.$$

7) Nous remarquons que $(f^{-1})' = \frac{1}{2c}g'$ donc $(f^{-1} - \frac{1}{2c}g)' = 0$. Ainsi $f^{-1} - \frac{1}{2c}g$ est constante sur $]-1,1[$. Puisque $g(0) = f^{-1}(0) = 0$ nous obtenons que $f^{-1}(y) = \frac{1}{2c}g$ sur $]-1,1[$. Ainsi

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

8) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} x = f^{-1}(y) \qquad \iff \qquad 2cx = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \qquad &\iff \qquad e^{2cx} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff \qquad e^{2cx}(1-y) = 1+y \\ &\iff \qquad e^{2cx} - 1 = y(1+e^{2cx}) \\ &\iff \qquad y = \frac{e^{2cx}+1}{e^{2cx}+1} = \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}$. Réciproquement cette dernière fonction est dérivable et elle vérifie $(*)$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} &= \frac{\frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}} + \frac{e^{cy}-e^{-cy}}{e^{cy}+e^{-cy}}}{1+\frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}\frac{e^{cy}-e^{-cy}}{e^{cy}+e^{-cy}}} = \frac{(e^{cx}-e^{-cx})(e^{cy}+e^{-cy})+(e^{cy}-e^{-cy})(e^{cx}+e^{-cx})}{(e^{cx}+e^{-cx})(e^{cy}+e^{-cy})+(e^{cx}-e^{-cx})(e^{cy}-e^{-cy})} \\ &= \frac{e^{c(x+y)}+e^{c(x-y)}-e^{-c(x-y)}-e^{-c(x+y)}+e^{c(x+y)}+e^{-c(x-y)}-e^{c(x-y)}-e^{-c(x+y)}}{e^{c(x+y)}+e^{c(x-y)}+e^{-c(x-y)}+e^{-c(x+y)}+e^{c(x+y)}-e^{c(x-y)}-e^{-c(x-y)}+e^{-c(x+y)}} \\ &= \frac{2e^{c(x+y)}-2e^{-c(x+y)}}{2e^{c(x+y)}+2e^{-c(x+y)}} = \frac{e^{c(x+y)}-e^{-c(x+y)}}{e^{c(x+y)}+e^{-c(x+y)}} = f(x+y) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que les solutions au problèmes sont les fonctions constantes égales à -1 ou à 1 ainsi que les fonctions

$$x \longmapsto \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quelques remarques générales :

- Soulignez ou encadrez les résultats principaux (c'est une habitude qui se perd depuis quelques devoirs).
- Dans la question 4, on pouvait utiliser le taux d'accroissement. Attention on n'aligne jamais des égalités de limites. On fait d'abord tous les calculs puis, seulement à la fin, on passe à la limite. Comme cela : donnons-nous $(x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)+f(h)-f(x)(1+f(x)f(h))}{h(1+f(x)f(h))} = \frac{f(h)}{h}\left(1-f^2(x)\right)\frac{1}{1+f(x)f(h)}.$$

  Puisque f est continue en 0 et $f(0)=0$, on a $\lim_{h\to 0}(1+f(x)f(h)) = 1$. Puisque f est dérivable en 0, on a $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = f'(0) = c$. Nous en déduisons que $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(c)(1-f^2(x))$.
- Ce n'est pas parce que f est bornée par 1 que $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$. Il faut des arguments supplémentaires (puisque f est monotone et continue, il suffit de calculer des limites de f en $\pm\infty$, cf. question 5).