

Devoir maison n° 7

À rendre le vendredi 22 décembre 2017

Il s'agit de l'exercice 10 du TD n° 13. Il est à rédiger au propre sur une copie double à l'encre noire ou bleue.

L'objectif est que vous réfléchissiez à plusieurs sur cet exercice qui n'est pas si facile. Ainsi je vous demande de faire des groupes de 2 (minimum) ou 3 (maximum) et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie de l'exercice.

EXERCICE 1

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} et à valeurs réelles vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}. \quad (*)$$

- 1) Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant (*).
- 2) Montrer qu'une fonction vérifiant (*) et prenant la valeur 1 ou la valeur -1 en un certain point est constante.

On suppose dans la suite de l'exercice que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie (*).

- 3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$ puis calculer $f(0)$.
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $c = f'(0)$. En déduire que $c \neq 0$.
- 5) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$ et que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.
- 6) Calculer les dérivées des fonctions f^{-1} et $g : y \in] -1, 1[\mapsto \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
- 7) En déduire, pour tout $y \in] -1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y et c .
- 8) Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} et à valeurs réelles vérifiant (*).