Correction du DM nº 6

Exercice 1

1) a) Il suffit de remarquer que l'on actionne exactement un interrupteur à chaque étape. On alterne donc entre une situation où l'un des voyants et allumé et l'autre éteint (à l'issue des étapes impaires) et une situation où les deux voyants sont tous les deux éteints ou bien tous les deux allumés (à l'issue des étapes paires). Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{2n} = \varnothing$, $C_{2n+1} = \Omega$ et $A_{2n+1} = B_{2n+1} = \varnothing$.

b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{2n} = \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$ et

$$(a_{2n+1}, b_{2n+1}, c_{2n+1}) = \big(\mathbb{P}(A_{2n+1}), \mathbb{P}(B_{2n+1}), \mathbb{P}(C_{2n+1})\big) = (0, 0, 1).$$

c) A l'issue d'une étape paire les deux voyants sont tous les deux éteints ou bien tous les deux allumés (et donc $\Omega = A_{2n} \cup B_{2n}$). Bien sûr ces deux situations ne peuvent pas se produire en même temps (et donc $A_{2n} \cap B_{2n} = \varnothing$). Cela signifie que (A_{2n}, B_{2n}) est un système complet d'événements.

2) a) A l'issue des deux premiers lancers, les deux voyants sont éteints si et seulement si le voyant allumé à l'issue du premier lancer a été éteint à l'issue du deuxième, c'est-à-dire si et seulement si on a obtenu deux fois Pile ou deux fois Face. Ainsi $B_2 = (T_1 \cap T_2) \cup (\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2)$.

Les événements $T_1 \cap T_2$ et $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2$ sont incompatibles donc $b_2 = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbb{P}(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2)$. Les événements T_1 et T_2 sont indépendants et de même probabilité égale à p. Ainsi $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2) = p^2$. De même $\mathbb{P}(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) = \mathbb{P}(\overline{T}_1)\mathbb{P}(\overline{T}_2) = (1-p)^2$. Ainsi $b_2 = p^2 + (1-p)^2$.

b) A l'issue des deux premiers lancers, les deux voyants sont allumés si et seulement si on a allumé un voyant à l'issue du premier lancer puis l'autre voyant à l'issue du deuxième lancer, c'est-à-dire si et seulement si on a obtenu Pile puis Face ou le contraire. Ainsi $A_2 = (T_1 \cap \overline{T}_2) \cup (\overline{T}_1 \cap T_2)$. Les événements T_1 et T_2 sont incompatibles donc $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap \overline{T}_2) + \mathbb{P}(\overline{T}_1 \cap T_2)$. Les événements T_1 et $\overline{T}_2$ sont indépendants ainsi que les événements $\overline{T}_1$ et T_2. Ainsi

$$a_2 = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(\overline{T}_2) + \mathbb{P}(\overline{T}_1)\mathbb{P}(T_2) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{2n} T_k$ est réalisé, cela signifie que l'on a obtenu Pile aux $2n$ premiers lancers. Par conséquent on a tour à tour allumé puis éteint le voyant (1) et on a jamais touché au voyant (2). Puisque le voyant (1) était initialement éteint et que l'on a actionné l'interrupteur (1) un nombre pair de fois, on obtient que B_{2n} est réalisé. On en déduit que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{2n} T_k\right) \leqslant \mathbb{P}(B_{2n})$.

Par indépendance des lancers, on a $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{2n} T_k\right) = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(T_k) = p^{2n} > 0$. Ainsi $\mathbb{P}(B_{2n}) > 0$.

b) On a $\mathbb{P}_{B_{2n}}(B_{2n+2}) = \mathbb{P}_{B_{2n}}\big((T_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (\overline{T}_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})\big)$. Or l'événement B_{2n} est défini exclusivement à partir des événements de la famille $(T_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$ donc il est indépendant de l'événement $(T_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (\overline{T}_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}_{B_{2n}}(B_{2n+2}) = \mathbb{P}\big((T_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (\overline{T}_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})\big) = p^2 + (1-p)^2 = b_2.$$

par incompatibilité et indépendance.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De même on a $\overline{T}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{2n} T_k \subset A_{2n}$. On en déduit que $\mathbb{P}\left(\overline{T}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{2n} T_k\right) \leqslant \mathbb{P}(A_{2n})$.

Par indépendance des lancers, on a $\mathbb{P}\left(\overline{T}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{2n} T_k\right) = \mathbb{P}(\overline{T}_1) \prod_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(T_k) = (1-p)p^{2n-1} > 0$.

Ainsi $\mathbb{P}(A_{2n}) > 0$. Ensuite, de même que précédemment,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{A_{2n}}(B_{2n+2}) &= \mathbb{P}_{A_{2n}}\big((\overline{T}_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (T_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})\big) \\
&= \mathbb{P}\big((\overline{T}_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (T_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})\big) \\
&= (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p) = a_2.
\end{aligned}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque (A_{2n}, B_{2n}) est un système complet d'événement et que $\mathbb{P}(A_{2n}) > 0$ et $\mathbb{P}(B_{2n}) > 0$, la formule des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned}
b_{2n+2} = \mathbb{P}(B_{n+2}) &= \mathbb{P}_{A_{2n}}(B_{n+2})\mathbb{P}(A_{2n}) + \mathbb{P}_{B_{2n}}(B_{n+2})\mathbb{P}(B_{2n}) \\
&= a_2 a_{2n} + b_2 b_{2n} \\
&= a_2(1 - b_{2n} - c_{2n}) + b_2 b_{2n} \\
&= a_2 + (b_2 - a_2) b_{2n} \\
&= 2p(1-p) + \big(p^2 + (1-p)^2 - 2p(1-p)\big) b_{2n} \\
&= 2p(1-p) + \big(p - (1-p)\big)^2 b_{2n} = \alpha b_{2n} + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = (2p-1)^2$ et $\beta = 2p(1-p)$.

b) On remarque que $b_2 = p^2 + (1-p)^2 = (2p-1)^2 \times 1 + 2p(1-p)$ donc la relation précédente reste vraie pour $n = 0$. On constate que $(b_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Cherchons une solution particulière constante : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
x = (2p-1)^2 x + 2p(1-p) \quad &\iff \quad \big(1 - (2p-1)^2\big) x = 2p(1-p) \\
&\iff \quad 2p(2-2p) x = 2p(1-p) \\
&\iff \quad x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = b_{2n} - x$. On vérifie que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(2p-1)^2$ et de terme initial $x_0 = b_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{2n} = x_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^{2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\big(1 + (2p-1)^{2n}\big).$$

c) Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{2n} = 1 - b_{2n} = 1 - \frac{1}{2}\big(1 + (2p-1)^{2n}\big) = \frac{1}{2}\big(1 - (2p-1)^{2n}\big).$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement E_n : « A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, les deux voyants sont de nouveau éteints et ce pour la première fois depuis le début du jeu ».

a) A l'issue d'un rang impair, l'un des voyants et allumé et l'autre est éteint. Donc c'est impossible que les deux voyants soient pour la première fois à nouveau éteints tous les deux à un rang impair. Ainsi $E_{2n+1} = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(E_{2n+1}) = 0$.

b) On a $E_2 = B_2$ d'où la réponse.

c) On a $E_2 = A_2 \cap B_4$ donc $P(E_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap B_4) = \mathbb{P}_{A_2}(B_4)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2)^2 = \big(2p(1-p)\big)^2$.

d) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On a $E_{2n+2} = B_{2n+2} \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_{2k}$. La formule des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}(E_{2n+2}) = \mathbb{P}(A_2) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{A_2 \cap \cdots \cap A_{2k}}(A_{2k+2}) \times \mathbb{P}_{A_2 \cap \cdots \cap A_{2k}}(B_{2n+2}).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{A_2\cap\cdots\cap A_{2k}}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}_{A_{2k}}(A_{2k+2}) = 1 - \mathbb{P}_{A_{2k}}(B_{2k+2}) = 1 - a_2 = b_2$. Ensuite $\mathbb{P}_{A_2\cap\cdots\cap A_{2k}}(B_{2n+2}) = 1 - \mathbb{P}_{A_2\cap\cdots\cap A_{2k}}(A_{2n+2}) = 1 - b_2 = a_2$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(E_{2n+2}) = a_2 \prod_{k=1}^{n-1} b_2 \times a_2 = a_2^2 b_2^{n-1}.$$

Exercice 2

1) Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événement. S'agit-il d'événements de probabilités non nulles ?

   - Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que la mouche reste dans la salle de bain les n premières minutes est non nulle (il s'agit de $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ d'après la formule des probabilités composées). Par conséquent la probabilité qu'elle soit dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minutes est également non nulle.
   - De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la mouche soit dans la chambre les n premières minutes est non nulle (il s'agit de $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'après la formule des probabilités composées). Par conséquent la probabilité qu'elle soit dans le salon à la $n^{\text{ième}}$ minutes est également non nulle.
   - Par contre la mouche ne peut être dehors qu'à partir de la deuxième minute (avec probabilité $\frac{2}{3}\frac{1}{4}$ d'après la formule des probabilités composées). Si elle sort, elle ne revient jamais donc, pour tout $n \geqslant 2$, la probabilité qu'elle soit dehors à la $n^{\text{ième}}$ minutes est non nulle.

   Attention donc avant d'appliquer la formule des probabilités totales.

   - On a $b_0 = \mathbb{P}(B_0) = 1$ et $c_0 = \mathbb{P}(C_0) = 0$.
   - On a $b_1 = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$ et $c_1 = \mathbb{P}(C_1) = \frac{2}{3}$.
   - Puisque (B_1, C_1) est un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales entraîne que

   $$b_2 = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(B_2)\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{4}c_1.$$

   $$c_2 = \mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}_{B_1}(C_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(C_2)\mathbb{P}(C_1) = \frac{2}{3}b_1 + \frac{1}{2}c_1.$$

   Soit $n \geqslant 2$. Puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales entraîne que

   $$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ &= 0 \cdot a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ &= 0 \cdot a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{4}c_n - \frac{2}{3}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0,$$

$$4b_{n+1} + 3c_{n+1} = \frac{4}{3}b_n + \frac{4}{4}c_n + \frac{6}{3}b_n - \frac{3}{2}c_n = \frac{5}{6}(4b_n + 3c_n).$$

Ainsi $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite nulle et la suite $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $5/6$.

3) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2b_n - c_n = 0, \qquad \text{et} \qquad 4b_n + 3c_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}(4b_1 + 3c_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{10}{3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad c_n = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Enfin, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

4) Sachant que la mouche est dans la salle de bain au début de l'observation, la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente est égale à 1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente est

$$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}_{B_{n-1}}(B_n)\mathbb{P}(B_{n-1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} = \frac{2}{5}.$$

5) On cherche le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(A_n) \geqslant 0,95$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\mathbb{P}(A_n) \geqslant 0,95 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leqslant 0,05 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n-1)\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0,05)$$

car $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{5}{6} < 1$, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(A_n) \geqslant 0,95 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n-1 \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 16,43,$$

i.e. $n \geqslant 17,43$. Il faut donc 18 minutes pour que la mouche soit dehors avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.