Devoir maison n° 6

À rendre le vendredi 17 novembre 2017

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$. On dispose également d'un boitier constitué de deux interrupteurs (1) et (2) qui commandent chacun un voyant lumineux. Au début du jeu, les deux voyants sont éteints. On lance la pièce consécutivement et indépendamment un nombre indéfini de fois et, à chaque lancer, on procède ainsi :

- si la pièce tombe sur Pile, on actionne l'interrupteur (1),
- si la pièce tombe sur Face, on actionne l'interrupteur (2).

Lorsqu'on actionne un interrupteur, le voyant correspondant s'allume s'il était éteint et s'éteint s'il était allumé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements :

- A_n : « A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, les deux voyants sont allumés »,
- B_n : « A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, les deux voyants sont éteints »,
- C_n : « A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, l'un des voyants est allumé et l'autre est éteint »,
- T_n : « La pièce tombe sur Pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Puisque les voyants sont éteints au début du jeu, on pose $A_0 = C_0 = \varnothing$ et $B_0 = \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1) a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{2n} = \varnothing$, $C_{2n+1} = \Omega$ et $A_{2n+1} = B_{2n+1} = \varnothing$.
   b) En déduire une expression de c_{2n} et de $(a_{2n+1}, b_{2n+1}, c_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la famille d'événements (A_{2n}, B_{2n}) ?
2) a) Justifier que $B_2 = (T_1 \cap T_2) \cup (\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2)$. En déduire b_2 en fonction de p.
   b) Calculer a_2 en fonction de p.
3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{2n} T_k \subset B_{2n}$. En déduire que $\mathbb{P}(B_{2n}) > 0$.
   b) Justifier que $B_{2n} \cap B_{2n+2} = B_{2n} \cap \Big((T_{2n+1} \cap T_{2n+2}) \cup (\overline{T}_{2n+1} \cap \overline{T}_{2n+2})\Big)$. En déduire que $\mathbb{P}_{B_{2n}}(B_{2n+2}) = b_2$.
   c) Montrer de façon analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_{2n}) > 0$ et $\mathbb{P}_{A_{2n}}(B_{2n+2}) = a_2$.
4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b_{2n+2} = (2p-1)^2\, b_{2n} + 2p(1-p)$.
   b) Remarquer que la relation précédente reste vraie pour $n = 0$ et montrer (sans utiliser de raisonnement par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = \dfrac{1}{2}\big(1 + (2p-1)^{2n}\big)$.
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_{2n} en fonction de n et p.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement E_n : « A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer, les deux voyants sont de nouveau éteints et ce pour la première fois depuis le début du jeu ».
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $E_{2n+1} = \varnothing$. En déduire $\mathbb{P}(E_{2n+1})$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(E_2)$.
   c) Exprimer E_4 en fonction de A_2 et B_4. En déduire $\mathbb{P}(E_4)$.
   d) *On admet (cela se démontre de façon analogue à la question 3) que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathbb{P}_{A_2 \cap \cdots \cap A_{2k}}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}_{A_{2k}}(A_{2k+2}) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}_{B_2 \cap \cdots \cap B_{2k}}(B_{2k+2}) = \mathbb{P}_{B_{2k}}(B_{2k+2}).$$

   Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$. Exprimer E_{2n+2} en fonction de B_{2n+2} et $(A_{2k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$. En déduire que

$$\mathbb{P}(E_{2n+2}) = 4p^2(1-p)^2\big(1 - 2p(1-p)\big)^{n-1}.$$

Exercice 2

Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

- Si elle est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité $1/3$ ou elle va dans la chambre avec probabilité $2/3$.
- Si elle est dans la chambre à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité $1/2$, elle va dans la salle de bain avec probabilité $1/4$ ou elle sort part la fenêtre avec probabilité $1/4$ pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n (respectivement b_n et c_n) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
2) Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, c_n et b_n en fonction de n.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
5) Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?