# Correction du DM n° 5

## Exercice 1 : Image directe et réciproque d'une partie

### Partie A : image directe

1) Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{P}(E)$.

   a) Supposons que $A \subset B$. Supposons que $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $x \in B$ et donc $y = f(x) \in f(B)$. Nous en déduisons que $f(A) \subset f(B)$.

   b) Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ ou $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(A)$ ou $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cup f(B)$. Nous en déduisons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

   Réciproquement, supposons que $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ou il existe $z \in B$ tel que $y = f(z)$. Puisque $x \in A \cup B$ et $z \in A \cup B$, nous obtenons que $y \in f(A \cup B)$. Nous en déduisons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. D'où l'égalité.

   c) Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ et $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$. Nous en déduisons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2) a) Supposons que $f$ soit injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On a $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. On a aussi $y \in f(B)$ donc il existe $z \in B$ tel que $y = f(z)$. On a donc $f(x) = f(z)$ et l'injectivité de $f$ entraîne que $x = z$. Ainsi $x \in A \cap B$ et donc $y = f(x) \in f(A \cap B)$. Nous en déduisons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

   b) Supposons que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

   Donnons-nous $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. En considérant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on a $f(x) \in f(A)$ et $f(y) \in f(B)$ donc $f(x) = f(y) \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. Par conséquent $x = y$ (car sinon $A \cap B = \{x\} \cap \{y\} = \varnothing$ et donc $f(A \cap B) = \varnothing$, ce qui est absurde puisque ce dernier contient $f(x)$). Nous en déduisons que $f$ est injective.

### Partie B : image réciproque

1) Soient $S$ et $T$ des parties de $F$.

   a) Supposons que $S \subset T$. Soit $x \in f^{<-1>}(S)$. Par définition $f(x) \in S$ donc $f(x) \in T$ et donc $x \in f^{<-1>}(T)$. Ainsi $f^{<-1>}(S) \subset f^{<-1>}(T)$.

   b) Soit $x \in E$. Nous avons

$$x \in f^{<-1>}(S \cup T) \iff f(x) \in S \cup T \iff \left\{\begin{array}{l} f(x) \in S \\ \text{ou} \quad f(x) \in T \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \in f^{<-1>}(S) \\ \text{ou} \quad x \in f^{<-1>}(T) \end{array}\right. \iff x \in f^{<-1>}(S) \cup f^{<-1>}(T).$$

   Ainsi $f^{<-1>}(S \cup T) = f^{<-1>}(S) \cup f^{<-1>}(T)$.

   c) Soit $x \in E$. Nous avons

$$x \in f^{<-1>}(S \cap T) \iff f(x) \in S \cap T \iff \left\{\begin{array}{l} f(x) \in S \\ \text{et} \quad f(x) \in T \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \in f^{<-1>}(S) \\ \text{et} \quad x \in f^{<-1>}(T) \end{array}\right. \iff x \in f^{<-1>}(S) \cap f^{<-1>}(T).$$

   Ainsi $f^{<-1>}(S \cap T) = f^{<-1>}(S) \cap f^{<-1>}(T)$.

   d) Soit $x \in E$. Nous avons

$$x \in f^{<-1>}\left(\complement_F S\right) \iff f(x) \in \complement_F S \iff \mathrm{non}(f(x) \in S) \iff \mathrm{non}(x \in f^{<-1>}(S)) \iff x \in \complement_E \left(f^{<-1>}(S)\right).$$

   Ainsi $f^{<-1>}\left(\complement_F S\right) = \complement_E \left(f^{<-1>}(S)\right)$.

2) a) Soit $S \in \mathcal{P}(F)$. Soit $y \in f\big(f^{<-1>}(S)\big)$. Il existe $x \in f^{<-1>}(S)$ tel que $y = f(x)$. Par ailleurs $f(x) \in S$ donc $y \in S$. Ainsi $f\big(f^{<-1>}(S)\big) \subset S$.

b) Supposons que $f$ soit surjective et donnons-nous $S \in \mathcal{P}(F)$. Soit $y \in S$. Par hypothèse de surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(x) \in S$ et donc $x \in f^{<-1>}(S)$. Résumons : il existe $x \in f^{<-1>}(S)$ tel que $y = f(x)$. Cela signifie que $y \in f\big(f^{<-1>}(S)\big)$. Ainsi $S \subset f\big(f^{<-1>}(S)\big)$.

c) Si $f$ est surjective, alors les deux questions précédentes entraînent que, pour tout $S \in \mathcal{P}(F)$, $f\big(f^{<-1>}(S)\big) = S$.

Réciproquement supposons que, pour tout $S \in \mathcal{P}(F)$, $f\big(f^{<-1>}(S)\big) = S$. Soit $y \in F$. En considérant $S = \{y\}$, on a $y \in S = f\big(f^{<-1>}(S)\big)$. Par conséquent il existe $x \in f^{<-1>}(S)$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $f$ est surjective.

3) a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$ donc, par définition, $x \in f^{<-1>}\big(f(A)\big)$. Ainsi $A \subset f^{<-1>}\big(f(A)\big)$.

b) Supposons que $f$ soit injective et donnons-nous $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in f^{<-1>}\big(f(A)\big)$. Cela signifie que $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $z \in A$ tel que $f(x) = f(z)$. Par injectivité de $f$, on obtient que $x = z \in A$. Ainsi $f^{<-1>}\big(f(A)\big) \subset A$.

c) Si $f$ est injective, alors les deux questions précédentes entraînent que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f\big(f^{<-1>}(A)\big) = A$.

Réciproquement supposons que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f\big(f^{<-1>}(A)\big) = A$. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En considérant $A = \{x'\}$, on a $f(x) = f(x') \in f(A)$ donc $x \in f^{<-1>}\big(f(A)\big) = A$ et donc $x = x'$. Ainsi $f$ est injective.

4) Supposons que $f$ soit bijective. Soit $y \in F$. Par définition $f^{<-1>}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents par $f$ des éléments de $\{y\}$, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de $y$ par $f$. Puisque $f$ est bijective, $y$ admet un unique antécédent par $f$ : il s'agit de $f^{-1}(y)$. Ainsi $f^{<-1>}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

## Exercice 2 : suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_n(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$. L'application $P_n$ est continue (il s'agit d'une application polynomiale) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisqu'elle est la somme de fonction qui le sont). Comme $0 \in \left]P_n(0), \lim_{x \to +\infty} P_n(x)\right[$, le théorème de la bijection entraîne qu'il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $P_n(x_n) = 0$.

2) Calculons les premiers termes de la suite.
   - $x_0$ n'est pas défini.
   - On a $P_1(x) = x - 1$. Ainsi $x_1 = 1$.
   - On a $P_2(x) = x^2 + x - 1 = \left(x - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Ainsi $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) + x_n^{n+1} = x_n^{n+1} > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_{n+1}(x_n) > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$ et, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$. Ainsi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. En particulier, si $n \geqslant 2$, $x_n \leqslant x_2 < 1$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = -1 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}} = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 0$.

On a donc $P_n\left(\dfrac{1}{2}\right) < P_n(x_n)$ et, comme $P_n$ est strictement croissante, on en déduit que $\dfrac{1}{2} < x_n$.

b) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée (par $1/2$) donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell$. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{2} < x_n < x_2$ donc, par passage à la limite dans l'inégalité, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant x_2$. Comme $x_2 < 1$, on a $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

c) Prenons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $x_n \leqslant \ell + \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2}$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < x_n^n \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ et $\left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puisque $\left|\dfrac{\ell+1}{2}\right| < 1$. Par encadrement, nous obtenons que $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $0$.

5) Soit $n \geqslant 2$. On a $x_n > 1$ donc

$$-1 = P_n(x_n) + 1 = \sum_{k=1}^{n} x_n^k = x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}.$$

Ainsi $1 - x_n = x_n(1 - x_n^n)$. Par opérations algébriques sur les suites convergentes, nous obtenons $1 - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \ell$ et $x_n(1 - x_n^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi, par unicité de la limite d'une suite convergente, $1 - \ell = \ell$ et donc $\ell = \dfrac{1}{2}$.

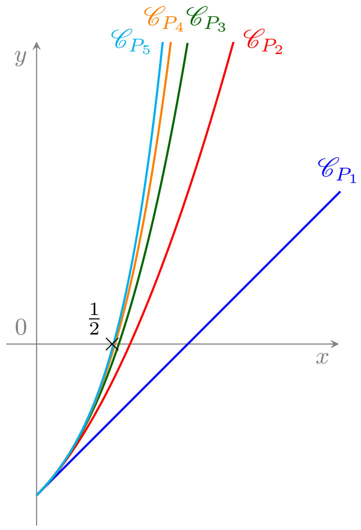


Illustration de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\dfrac{1}{2}$.

## Exercice 3 : Mains au poker fermé

1) Choisir une main revient à choisir 5 cartes distinctes parmi les $4r$ cartes, sans ordre. Il y a donc $\boxed{\binom{4r}{5}}$ mains possibles ($= 2598960100$ si $r = 13$ et $= 201376$ si $r = 8$).
2) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons $s(r)$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles.
   - On a $s(8) = 4$. En effet les suites possibles sont alors 7-8-9-10-J, 8-9-10-J-Q, 9-10-J-Q-K et 10-J-Q-K-A.
   - On a $s(13) = 10$. En effet les suites possibles sont les quatre précédentes ainsi que les suites A-2-3-4-5-6, 2-3-4-5-6, 3-4-5-6-7, 4-5-6-7-8, 5-6-4-7-8, 6-7-8-9-10.

   L'idée pour compter facilement le nombre de mains possibles d'un type donné est de remarquer que, pour choisir une main, on peut choisir d'abord les rangs des cartes puis leur couleur (ou l'inverse).

   a) Choisir une quinte flush revient à choisir la couleur (4 choix) puis la suite ($s(r)$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4s(r)}$ choix de mains avec une quinte flush ($= 40$ si $r = 13$ et $16$ si $r = 8$).
   *Parmi elles, il y a quatre quintes flush royales :* $10\clubsuit - J\clubsuit - Q\clubsuit - K\clubsuit - A\clubsuit$, $10\spadesuit - J\spadesuit - Q\spadesuit - K\spadesuit - A\spadesuit$, $10\diamondsuit - J\diamondsuit - Q\diamondsuit - K\diamondsuit - A\diamondsuit$ *et* $10\heartsuit - J\heartsuit - Q\heartsuit - K\heartsuit - A\heartsuit$.

   b) Choisir un carré revient à choisir le rang des quatre cartes de même couleur ($r$ choix) puis de choisir une des cartes restantes ($4r - 4$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4r(r-1)}$ choix de mains avec un carré ($= 624$ si $r = 13$ et $224$ si $r = 8$).

   c) Choisir un full revient à choisir :
      - le rang des trois cartes de même rang ($r$ choix) puis trois cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{3} = 4$ choix),
      - le rang des deux cartes de même rang ($r - 1$ choix puisqu'on ne peut bien sûr plus choisir le même rang que précédemment) puis deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix).

      Ainsi il y a $\boxed{24r(r-1)}$ choix de mains avec un full ($= 3744$ si $r = 13$ et $1344$ si $r = 8$).

   d) Choisir une couleur revient à choisir la couleur des cinq cartes (4 choix) puis cinq cartes ayant cette couleur mais ne formant pas une suite ($\binom{r}{5} - s(r)$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4\binom{r}{5} - 4s(r)}$ choix de mains avec une couleur ($= 5108$ si $r = 13$ et $208$ si $r = 8$).

   e) Choisir une quinte revient à choisir la suite ($s(r)$ choix) puis cinq cartes ayant ces rangs mais n'étant pas tous de la même couleur (4 choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020s(r)}$ choix de mains avec une quinte ($= 10200$ si $r = 13$ et $4080$ si $r = 8$).

   f) Choisir un brelan revient à choisir :
      - le rang des trois cartes de même rang ($r$ choix) puis trois cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{3} = 4$ choix),

- les rangs des deux dernières cartes ($\binom{r-1}{2} = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un full) puis leurs couleurs respectives ($4^2$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{32r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec un brelan ($= 54912$ si $r = 13$ et $10752$ si $r = 8$).

g) Choisir une double paire revient à choisir :

- les rangs des deux paires ($\binom{r}{2}$ choix) puis, pour chaque paire, deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- la dernière carte qui doit être d'un rang différent ($4r - 8$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{72r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec une double paire ($= 123552$ si $r = 13$ et $24192$ si $r = 8$).

h) Choisir une paire revient à choisir :

- le rang des deux premières cartes ($r$ choix) puis deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- les rangs des trois dernières cartes ($\binom{r-1}{3} = \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un brelan ou une double paire) puis leurs couleurs respectives ($4^3$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{64r(r-1)(r-2)(r-3)}$ mains possibles avec une paire ($= 1098240$ si $r = 13$ et $107520$ si $r = 8$).

i) Choisir une carte haute revient à choisir le rang des cinq cartes ($\binom{r}{5} - s(r)$ car les rangs doivent être distincts et ne pas former une suite) puis la couleur des cartes ($4$ choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020\left(\binom{r}{5} - s(r)\right)}$ mains possibles avec une carte haute ($= 1302540$ si $r = 13$ et $53040$ si $r = 8$).

3) On obtient le tableau de probabilités suivants (avec des approximations obtenues avec l'aide de Scilab) :

| Main | Probabilité ($r = 13$) | Probabilité ($r = 8$) |
|---|---|---|
| Quinte flush royale | 0,000154 % | 0,00199 % |
| Quinte flush | 0,00139 % | 0,0060 % |
| Carré | 0,024 % | 0,111 % |
| Full | 0,144 % | 0,667 % |
| Couleur | 0,197 % | 0,103 % |
| Quinte | 0,392 % | 2,026 % |
| Brelan | 2,113 % | 5,339 % |
| Double paire | 4,754 % | 12,013 % |
| Paire | 42,257 % | 53,393 % |
| Carte haute | 50,118 % | 26,339 % |

On remarque que, si $r = 13$, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces. Par contre, si $r = 8$, il est plus probable d'obtenir une paire qu'une carte haute et il est aussi plus probable d'obtenir un carré (et un full) qu'une couleur.

---

**Quelques remarques générales :**

- Il faut impérativement citer le nom des théorèmes lorsqu'on les emploie.
- Attention $P_n(x)$ n'est pas une fonction mais un nombre. Par ailleurs $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas non plus une fonction mais une suite de fonctions.
- Attention $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions et non de réels. Nous n'avons vu aucun résultat sur ce type de suite... en particulier dire qu'elle est croissante n'a pas de sens.
- Écrire « Posons $f : x \longmapsto P_n(x)$ » est inutile. Cette fonction s'appelle déjà $P_n$.
- Dire que $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ parce que $|x_n| < 1$ est une erreur grave. Nous avons vu des contre exemples en cours !