Devoir maison n° 5

À rendre le jeudi 9 novembre 2017

Ce devoir n'est en aucun cas facultatif *et les trois exercices doivent être traités.*

Rédigez sur des copies doubles lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.

Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié.

N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Image directe et réciproque d'une partie

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Partie A : image directe

Soient A une partie de E et $y \in F$. Rappelons que, par définition de l'image d'une partie par une application, nous avons $y \in f(A)$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

1) Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
   a) Montrer que, si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
   b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2) a) Supposons que f soit injective. Montrer que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \qquad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

   b) Réciproquement supposons que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Montrer qu'alors f est injective.

Partie B : image réciproque

Soit S une partie de F. On appelle image réciproque de S par f, et on note $f^{<-1>}(S)$, l'ensemble des antécédents des éléments de S, c'est-à-dire $f^{<-1>}(S) = \{x \in E \,|\, f(x) \in S\}$. Autrement dit, si x est un élément de E, alors

$$x \in f^{<-1>}(S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \in S.$$

1) Soient S et T des parties de F.
   a) Montrer que, si $S \subset T$, alors $f^{<-1>}(S) \subset f^{<-1>}(T)$.
   b) Montrer que $f^{<-1>}(S \cup T) = f^{<-1>}(S) \cup f^{<-1>}(T)$.
   c) Montrer que $f^{<-1>}(S \cap T) = f^{<-1>}(S) \cap f^{<-1>}(T)$.
   d) Montrer que $f^{<-1>}\left(\complement_F S\right) = \complement_E \left(f^{<-1>}(S)\right)$.
2) a) Soit $S \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que $f\big(f^{<-1>}(S)\big) \subset S$.
   b) Supposons que f soit surjective. Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{P}(F)$, $S \subset f\big(f^{<-1>}(S)\big)$.
   c) En déduire que f est surjective si et seulement si, pour tout $S \in \mathcal{P}(F)$, $f\big(f^{<-1>}(S)\big) = S$.
3) a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \subset f^{<-1>}\big(f(A)\big)$.
   b) Supposons que f soit injective. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{<-1>}\big(f(A)\big) \subset A$.
   c) En déduire que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f\big(f^{<-1>}(A)\big) = A$.
4) Soit $y \in F$. Comparer $\{f^{-1}(y)\}$ et $f^{<-1>}(\{y\})$ dans le cas où f est bijective.

Tournez SVP.

Exercice 2 : suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note x_n. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2) Calculer x_0, x_1 et x_2.
3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(x_n) > 0$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n < 1$.
4) a) Calculer $P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n > \dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.
   c) Montrer que, pour tout n assez grand, $u_n \leqslant \dfrac{\ell + 1}{2}$. En déduire que $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
5) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $1 - x_n = x_n(1 - x_n^n)$. En déduire que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 : Mains au poker fermé

Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur (♣, ♠, ♢ ou ♡) et un rang (un numéro ou une figure).

On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de 52 cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de 32 cartes[1]). On obtient ce qu'on appelle une main.

Dans cet exercice on se propose de calculer le nombre des différents types de mains au poker fermé. On donnera d'abord le résultat en fonction de r puis une application numérique pour $r = 8$ et $r = 13$ (on pourra s'aider de *Scilab*).

1) Calculer le nombre total de mains possibles.
2) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :
   a) une **quinte flush** (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs) ?
   b) un **carré** (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque) ?
   c) un **full** (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang) ?
   d) une **couleur** (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?
   e) une **quinte** (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur) ?
   On introduira $s(r)$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s(13) = 10$ et $r(8) = 4$.
   f) un **brelan** (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes) ?
   g) une **double paire** (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents) ?
   h) une **paire** (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire) ?
   i) une **carte haute** (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs) ?
3) Pour anticiper sur le chapitre 9, diviser chacun de ces nombres par le nombre total de mains possibles. On obtient alors les probabilités de chaque type de main. Vérifier que, si $r = 13$, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces (plus la probabilité est faible, plus la main est forte). Est-ce encore le cas si $r = 8$?

I'm sorry. That last hand... nearly killed me.
James Bond (Casino Royale, 2006)

1. Pour obtenir un jeu de 32 cartes à partir d'un jeu de 52 cartes, on enlève toutes les cartes numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6.