Correction du DM n° 4

Exercice 1

1) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de variations (certaines informations de ce tableau découlant de la question suivante) :

x	$-\infty$	-12	0	12	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-12 $\nearrow$	4 $\searrow$	-12 $\searrow$	$-\infty$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) - x = 4 - \frac{x^2}{9} - x = \frac{36 - x^2 - 9x}{9} = \frac{-(x+12)(x-3)}{9}.$$

Ainsi $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-12, 3]$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= f\left(4 - \frac{x^2}{9}\right) - x = 4 - \frac{1}{9}\left(4 - \frac{x^2}{9}\right)^2 - x \\ &= 4 - \frac{16}{9} + \frac{8x^2}{9^2} - \frac{x^4}{9^3} - x = \frac{1}{9^3}\left(20 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9x^2 - x^4 - 9x\right). \end{aligned}$$

Puisque $f(-12) = -12$ et $f(3) = 3$, on a aussi $f \circ f(-12) = -12$ et $f \circ f(3) = 3$. Ainsi -12 et 3 sont des racines du trinôme ci-dessus. Par conséquent, il existe des réels λ, a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \lambda(x-3)(x+12)(ax^2 + bx + c).$$

Regardons le coefficient du terme de degré 4 : on a $a\lambda = \dfrac{-1}{9^3}$ donc on peut choisir $a = 1$ et $\lambda = \dfrac{-1}{9^3}$. Regardons le coefficient du terme de degré 0 : on a $-3 \cdot 12\, c\lambda = \dfrac{-20 \cdot 9^2}{9^3}$ donc $c = \dfrac{20 \cdot 9^2}{3 \cdot 12} = 45$. Regardons le coefficient du terme de degré 3 : $\lambda(b - 3a + 12a) = 0$ donc $b = -9a = -9$.

Le trinôme $aX^2 + bX + c = X^2 - 9X + 45$ admet pour discriminant $-99 < 0$ donc il est à valeurs strictement positives. Nous en déduisons que les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$ sont -12 et 3.

2) Si $u_0 = -12$, alors une récurrence immédiate montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -12. Si $u_0 = 12$, alors $u_1 = f(12) = 4 - \dfrac{12^2}{9} = -12$ et donc une récurrence immédiate montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à -12.

3) Supposons que $|u_0| > 12$.

a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n < -12$.

- *Initialisation :* Si $|u_0| > 12$, alors $\dfrac{u_0^2}{9} > \dfrac{144}{9} = 16$ et donc $u_1 = 4 - \dfrac{u_0^2}{9} < -12$. Ainsi la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* Supposons que $u_n < -12$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est strictement croissante sur $]-\infty, -12]$, nous avons $u_{n+1} = f(u_n) < f(-12) = -12$. Donc cette propriété est vraie au rang $n+1$.

Nous en déduisons qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

b) Soit $n \geqslant 1$. Nous avons $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ puisque $u_n < -12$ (d'après la question précédente et la question 1b). Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Supposons que la suite est minorée. Dans ce cas elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de la limite monotone. Puisque f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire $\ell = -12$ ou $\ell = 3$. Par ailleurs $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n < u_1 < -12$. C'est absurde. Ainsi la suite n'est pas minorée et le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle tend vers $-\infty$.

4) Supposons que $|u_0| < 12$.

a) Nous déduisons du tableau de variations que $u_1 = f(u_0) \in]-12, 4]$. Une récurrence analogue à celle de la question précédente nous permet de montrer que $u_n \in]-12, 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque $]-12, 4]$ est stable par f).

b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0, 4]$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant k$, $u_n \in [0, 4]$.

- *Initialisation :* Nous avons supposé que $u_k \in [0, 4]$.
- *Hérédité :* Supposons que $u_n \in [0, 4]$ pour un certain $n \geqslant k$. Puisque f est strictement décroissante sur $[0, 4]$, nous avons $f(4) \leqslant f(u_n) < f(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{20}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Nous en déduisons qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant k$ par récurrence.

La fonction f est décroissante sur $[0, 4]$ donc $f \circ f$ est croissante sur $[0, 4]$. Nous en déduisons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones (à partir du rang $n_0 = \lfloor k/2 \rfloor + 1$ du moins).

Ce résultat que nous venons d'utiliser n'est pas techniquement dans le cours donc il faut s'attendre à savoir le démontrer. Par ailleurs on peut montrer également que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *ont des sens de variations contraires... mais ça ne nous est pas utile ici.*

Puisque les suites les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont également bornées, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elles convergent. Puisque f est continue sur $[0, 4]$, leurs limites respectives sont des points fixes de f sur $[0, 4]$. Il n'y a qu'une possibilité : ces deux limites sont égales à 3. Nous en déduisons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 3 et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

c) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0, 4]$, c'est-à-dire $u_n \in]-12, 0[$ d'après la question 4a. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisqu'elle est majorée par 0 elle converge vers une limite finie ℓ. Celle limite est donc un point fixe de f sur $[-12, 0]$. On a donc $\ell = -12$. C'est absurde puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 > -12$.

d) Nous en déduisons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \notin [0, 4]$ et la question 4b entraîne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

1) Soit μ un réel. La suite $\left(\mu\,(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad 9\mu(-2)^{n+2}=5(-2)^n-12\mu(-2)^{n+1}-8\mu(-2)^n.$$

Celle relation est vérifiée si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad (-2)^n\big(9\mu(-2)^2-5+12\mu(-2)+8\mu\big)=0$$

si et seulement si $\mu(9\cdot 4-2\cdot 12+8)-5=0$ si et seulement si $20\mu=5$ si et seulement si $\mu=\dfrac{1}{4}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $y_n=x_n-\mu\,(-2)^n$.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}9y_{n+2}&=9x_{n+2}-9\mu\,(-2)^{n+2}\\&=\big(5(-2)^n-12x_{n+1}-8x_n\big)-\big(5(-2)^n-12\mu(-2)^{n+1}-8\mu(-2)^n\big)\\&=-12\big(x_{n+1}-\mu(-2)^{n+1}\big)-8\big(x_n-\mu(-2)^n\big)=-12y_{n+1}-8y_n.\end{aligned}$$

b) Nous remarquons que la suite la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $9r^2=-12r-8$. Son discriminant est $\Delta=-12^2<0$. Elle admet donc deux racines complexes non réelles :

$$\frac{-12+12i}{2\cdot 9}=\frac{2}{3}(-1+i)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{3i\pi/4}$$

et $\dfrac{-12-12i}{2\cdot 9}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}e^{-3i\pi/4}$. Nous en déduisons qu'il existe α et β des réels tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad y_n=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n\left(\alpha\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\beta\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right).$$

On a $y_0=x_0-\mu=\dfrac{3}{4}$ et $y_1=x_1-\mu(-2)=\dfrac{1}{2}$. Par ailleurs

$$y_0=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^0(\alpha\cos(0)+\beta\sin(0))=\alpha$$

et

$$y_1=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^1\left(\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\beta\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{3}(\beta-\alpha).$$

Ainsi $\alpha=\dfrac{3}{4}$ et $\beta=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}+\alpha=\dfrac{3}{2}$. Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad y_n=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right).$$

Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$x_n=y_n+\frac{(-2)^n}{4}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)+\frac{(-2)^n}{4}.$$