Devoir maison n° 4

À rendre le vendredi 13 octobre 2017

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{u_n^2}{9}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 4 - \dfrac{x^2}{9}$.

   b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c) Montrer qu'il existe des réels λ, a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \lambda(x-3)(x+12)(ax^2+bx+c).$$

   En déduire les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

2) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|u_0| = 12$.

3) Supposons que $|u_0| > 12$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < -12$.

   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (que l'on explicitera).

4) Supposons que $|u_0| < 12$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-12 < u_n \leqslant 4$.

   b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0,4]$. Montrer que, pour tout $n \geqslant k$, $u_n \in [0,4]$. En déduire que, dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
   On étudiera les variations et la nature des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

   c) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0,4]$. A quel intervalle appartiennent les termes de la suite (à partir du rang 1) ? Quel est son sens de variations. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.

   d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pourra s'aider de la représentation graphique des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 9x_{n+2} = 5(-2)^n - 12x_{n+1} - 8x_n.$$

1) Déterminer un réel μ de telle sorte que la suite $\big(\mu\,(-2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - \mu\,(-2)^n$.

   a) Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de y_n puis de x_n en fonction de n.