Correction du DM n° 3

Exercice 1

1) a) Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E), alors $|z|^5 = |z^5| = |1| = 1$ et donc $|z| = 1$.

b) *On constate que $z \in \mathbb{C}$ est une solution de (E) si et seulement si il s'agit d'une racine cinquième de l'unité. Par contre les résultats théoriques à ce sujet ne sont pas exigibles (cf. programme d'ECS) donc on évite de les utiliser directement... il faut tout redémontrer. Heureusement on a vu en cours comment faire :*

Si z est solution de (E) alors, d'après la question précédente, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Nous avons donc $1 = z^5 = e^{5i\theta}$, d'après la formule de Moivre. Nous en déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5\theta = 2k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$. Réciproquement, si $z = e^{2i\ell\pi/5}$ pour un certain $\ell \in \mathbb{Z}$, alors $z^5 = e^{2i\ell\pi} = 1$.

On remarque enfin que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2i(k+5)\pi/5} = e^{2ik\pi/5}e^{2i\pi} = e^{2ik\pi/5}$. Ainsi (E) admet cinq solutions : $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = e^{2i\pi/5}$, $\zeta_2 = e^{4i\pi/5}$, $\zeta_3 = e^{6i\pi/5} = e^{-4i\pi/5}$ et $\zeta_4 = e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}$.

2) a) On a $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + 0^4 = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (E').

b) Donnons-nous $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $Z = z + \dfrac{1}{z}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
0 = Z^2 + Z - 1 \quad &\iff \quad 0 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 \\
&\iff \quad 0 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2z\frac{1}{z} + z + \frac{1}{z} - 1 \\
&\iff \quad 0 = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \\
&\iff \quad 0 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.
\end{aligned}$$

Au dernier équivalent, nous avons multiplié par le complexe non nul z^2. Puisque 0 n'est pas solution de (E'), nous avons montré que z est solution de (E') si et seulement si $Z^2 + Z - 1 = 0$.

c) Le trinôme $X^2 + X - 1$ admet pour discriminant $\Delta = 5$ donc il admet deux racines réelles : $r_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Nous avons $z + \dfrac{1}{z} = r_1$ si et seulement si $z^2 - r_1 z + 1 = 0$. Or le trinôme $X^2 - r_1 X + 1$ admet pour discriminant

$$\Delta_1 = (-r_1)^2 - 4 = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 16}{4} = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Une racine carrée de Δ_1 dans $\mathbb{C}$ est $\delta_1 = i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que le trinôme $X^2 - r_1 X + 1$ admet deux racines complexes : $\dfrac{r_1 - \delta_1}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} - \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ et $\dfrac{r_1 + \delta_1}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Nous avons $z+\dfrac{1}{z}=r_2$ si et seulement si $z^2-r_2z+1=0$. Or le trinôme X^2-r_2X+1 admet pour discriminant

$$\Delta_2=(-r_2)^2-4=\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}-4=\frac{6-2\sqrt{5}-16}{4}=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Une racine carrée de Δ_2 dans $\mathbb{C}$ est $\delta_2=i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que le trinôme X^2-r_2X+1 admet deux racines complexes : $\dfrac{r_2-\delta_2}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-\dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et $\dfrac{r_1+\delta_1}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

e) Nous déduisons des questions précédentes qu'un complexe $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de (E') si et seulement si $(Z=z+\dfrac{1}{z}$ et $Z^2+Z-1=0)$ si et seulement si $(z+\dfrac{1}{z}=r_1$ ou $z+\dfrac{1}{z}=r_2)$ si et seulement si

$$z\in\left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},\quad -\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},\right.$$
$$\left.\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right\}.$$

3) a) Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^5-1=z^5-1^5=(z-1)\sum_{k=0}^{4}z^{4-k}1^k=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1).$$

Ainsi $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ est une solution de (E) si et seulement si $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ si et seulement si $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ si et seulement si z est solution de (E').

b) Il reste à identifier précisément chaque racine. Pour cela regardons le signe de leurs parties réelles et imaginaires respectives.

- On a $\mathfrak{Re}(\zeta_1)=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\geqslant 0$ et $\mathfrak{Im}(\zeta_1)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\geqslant 0$ puisque $\dfrac{2\pi}{5}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Par conséquent $\zeta_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que
  $$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\qquad\text{et}\qquad\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$
- On a $\mathfrak{Re}(\zeta_2)=\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\leqslant 0$ et $\mathfrak{Im}(\zeta_2)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\geqslant 0$ puisque $\dfrac{4\pi}{5}\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.
  Par conséquent $\zeta_2=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que
  $$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\qquad\text{et}\qquad\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$
- Nous obtenons donc
  $$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
  et
  $$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Pour déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$*, on peut aussi utiliser la formule*

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

et donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$ *puisque* $\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$*. A première vue, il ne s'agit pas de la valeur indiquée dans l'énoncé... en fait si (bien sûr) car :*

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Exercice 2

---

1) Posons $f : x \longmapsto (x^{11/6}-1)^{\sqrt{5}}$.

   La fonction $x \longmapsto x^{11/6}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\dfrac{11}{6} > 1$). Ensuite, pour tout $x \geqslant 0$, $x^{11/6}-1 \geqslant 0$ si et seulement si $x^{11/6} \geqslant 1$ si et seulement si $x \geqslant 1$. Enfin la fonction $y \longmapsto y^{\sqrt{5}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\sqrt{5} > 1$). Nous en déduisons que $D_f = [1, +\infty[$. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{11}{6}x^{(11/6)-1}\sqrt{5}(x^{11/6}-1)^{\sqrt{5}-1} = \frac{11\sqrt{5}}{6}x^{5/6}(x^{11/6}-1)^{\sqrt{5}-1}.$$

2) Posons $g : x \longmapsto \ln(|2x^2+9x-5|)$.
   Le trinôme $2X^2+9X-5$ admet pour discriminant $\Delta = 121 = 11^2$ si bien qu'il admet deux racines réelles $\dfrac{-9+11}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-9-11}{4} = -5$. Puisque $y \longmapsto \ln(|y|)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+*$ et $\mathbb{R}_-^*$, nous obtenons que g est définie et dérivable sur $]-\infty, -5[$, $]-5, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-5, \dfrac{1}{2}\right\}$, $g'(x) = \dfrac{4x+9}{2x^2+9x-5}$.

3) Posons $h : x \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}\right)$.

   Remarquons déjà que, si $x = 0$, alors $\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $h(x)$ n'est pas défini. Nous avons :

   - La fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2} \in]0, \pi/2[$.
   - La fonction tangente est définie et dérivable sur $]0, \pi/2[$.

   Par conséquent h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h'(x) = -\frac{\pi x e^{-x^2}}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}\right)}$$

4) Posons $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\pi^x}{x} = \dfrac{e^{x\ln(\pi)}}{x}$.

   La fonction φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puisqu'elle est le produit des fonctions $x \longmapsto e^{x\ln(\pi)}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{\ln(\pi)x\pi^x - \pi^x}{x^2} = (\ln(\pi)x - 1)\frac{\pi^x}{x^2}.$$

5) Posons $\psi : x \longmapsto \cos(2\sin(3\cos(4x)))$.

La fonction ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car il s'agit de la composée de fonction qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \big(-4\sin(4x)\big)\big(3\cos(3\cos(4x))\big)\big(-2\sin(2\sin(3\cos(4x)))\big)\\ &= 24\sin(4x)\cos(3\cos(4x))\sin(2\sin(3\cos(4x))).\end{aligned}$$

Pour calculer cette dérivée sans se tromper, on peut écrire $\psi = u \circ v \circ w$ avec $u : x \mapsto \cos(2x)$, $v : x \mapsto \sin(3x)$ et $w : x \mapsto \cos(4x)$. On a

$$\psi' = (u \circ v \circ w)' = (v \circ w)' \times (u' \circ v \circ w) = w' \times (v' \circ w) \times (u' \circ v \circ w).$$

Quelques remarques générales :

- Passer au module dans une égalité de complexes n'est pas une opération réversible a priori. N'écrivez surtout pas d'équivalents.
- J'ai fait la remarque en cours sur le fait que l'on pouvait utiliser $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ pour la dernière question de l'exercice 1. Il faut écouter TOUT ce que je vous dis avec attention et le noter !
- Beaucoup d'entre vous n'introduisent pas encore les variables systématiquement. C'est un réflexe à prendre : vous devez commencer chaque question utilisant la variable z par « Soit z ..... ». En fonction des questions, elle n'appartient pas forcément au même ensemble. De même dans l'exercice 2, c'est bien de poser f la fonction $x \longmapsto \cdots$ mais cela n'introduit pas x qui est muette.
- Si vous calculez deux discriminants l'un à la suite de l'autre, utilisez une lettre différente : ce ne sont pas a priori les mêmes nombres. Cela pourrait être la source d'erreurs de confusion.
- Pour dire qu'une fonction f est définie sur un intervalle I, on peut dire au choix :
  - f est définie sur I,
  - $f(x)$ est définie pour tout $x \in I$,

  mais certainement pas un mélange des deux. La phrase « f est définie pour $x \in I$ » n'a pas de sens et la phrase « $f(x)$ est définie sur I » voudrait plutôt dire que $f(x) \in I$.
- Supposons que l'on dispose de deux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Lorsque l'on veut montrer que, pour un certain réel x, $g \circ f(x)$ est bien défini il faut d'abord justifier que $x \in D_f$ puis que $f(x) \in D_g$. Le fait que $x \in D_g$ ou non n'apporte pas d'informations.
- Les fonctions $x \mapsto \pi^x$ et $x \mapsto x^\pi$ ne sont pas les mêmes...
- Dire qu'une fonction est définie/continue/dérivable sur un intervalle I comme quotient de deux fonctions qui le sont est un argument incomplet. Il faut ajouter que la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur I.