Devoir maison nº 3

À rendre le vendredi 6 octobre 2017

Exercice 1

1) Considérons l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que les solutions de (E) sont de module 1.
   b) Montrer que (E) admet cinq solutions : le réel 1 et quatre complexes non réels que l'on écrira sous forme exponentielle (pour chacun d'entre eux, on fera apparaitre la détermination de leur argument qui est comprise entre $-\pi$ et π).
2) Considérons l'équation (E') : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que 0 n'est pas solution de (E').
   b) Montrer qu'un complexe z est une solution de (E') si et seulement si $Z^2 + Z - 1 = 0$ avec $Z = z + \dfrac{1}{z}$.
   c) Montrer que le trinôme $X^2 + X - 1$ admet deux racines réelles r_1 et r_2 que l'on explicitera.
   d) Résoudre les équations $z + \dfrac{1}{z} = r_1$ et $z + \dfrac{1}{z} = r_2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
   e) En déduire que (E') admet quatre solutions complexes non réelles que l'on explicitera (sous forme algébrique).
3) a) Montrer que les solutions de (E') sont les solutions complexes non réelles de (E).
   b) En déduire les valeurs (exactes) de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
   c) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression).

1) $x \longmapsto (x^{11/6} - 1)^{\sqrt{5}}$.
2) $x \longmapsto \ln(|2x^2 + 9x - 5|)$.
3) $x \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2} e^{-x^2}\right)$.
4) $x \longmapsto \dfrac{\pi^x}{x}$.
5) $x \longmapsto \cos(2\sin(3\cos(4x)))$