Correction du DM n° 2

Exercice 1

1) Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < a < b$.
   a) Supposons que $a = 1$. Pour tout $b > a$, on a $b^1 = b > 1 = 1^b$. Nous en déduisons qu'il n'y a pas de solution.
   b) Supposons que $a = 2$. Nous avons alors $a^b = b^a$ si et seulement si $2^b = b^2$.

   On a $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$ et $2^4 = 16 = 4^2$. Ainsi $b = 4$ est solution.
   Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash [\![0, 4]\!]$, la propriété $P(n)$: « $2^n > n^2$ » est vraie (cela prouvera que seul $b = 4$ est solution de l'équation $2^b = b^2$).
   - *Initialisation :* On a $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Ainsi $P(5)$ est vraie.
   - *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 5$. Montrons que $P(n+1)$ est alors vraie. L'hypothèse de récurrence entraîne que

   $$\begin{aligned} 2^{n+1} - (n+1)^2 &= 2 \cdot 2^n - (n+1)^2 \\ &> 2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1. \end{aligned}$$

     Or le trinôme $X^2 - 2X - 1$ admet deux racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. Elles sont toutes les deux strictement inférieures à 5 si bien que

   $$2^{n+1} - (n+1)^2 = (n - 1 - \sqrt{2})(n - 1 + \sqrt{2}) > 0.$$

     Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

   Nous en déduisons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.
2) Soient a et b deux réels strictement positifs. Par définition $a^b = e^{b\ln(a)}$ et $b^a = e^{a\ln(b)}$. Puisque $\exp$ est une bijection, nous en déduisons que $a^b = b^a$ si et seulement si $b\ln(a) = a\ln(b)$. Enfin $a \neq 0$ et $b \neq 0$ donc (en divisant par ab chaque membre de l'équation) $a^b = b^a$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.
3) Les fonctions $\ln$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$ dont leur produit aussi. Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, elles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il en est de même pour la fonction f. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 - \ln(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant e$ (en effet $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Nous en déduisons le tableau de variations suivant :

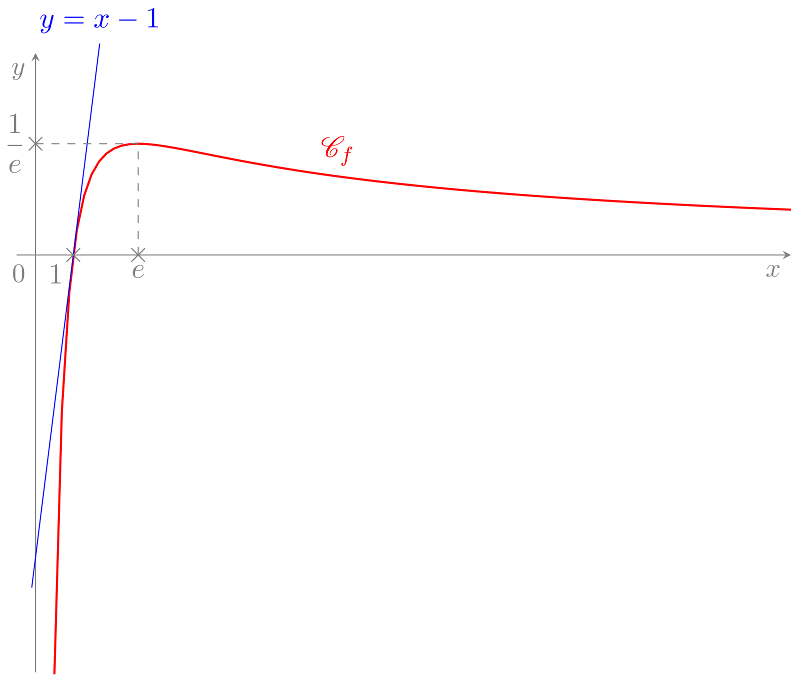
x	0	1	e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1/e$	↘	0

Déterminons les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (c'est une limite usuelle du cours).
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ si bien que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale et l'axe des ordonnées pour asymptote verticale. Déterminons quelques tangentes :

- On a $f'(e) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$ si bien que f admet la droite d'équation $y = \dfrac{1}{e}$ pour tangente en e.
- On a $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$ si bien que f admet la droite d'équation $y = x - 1$ pour tangente en 1.



4) Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après l'étude précédente, nous avons :
   - Si $y > 1/e$, alors y n'admet pas d'antécédent par f.
   - Si $y = 1/e$ ou $y \leqslant 0$, alors y admet un unique antécédent par f.
   - Si $y \in]0, 1/e[$ alors y admet deux antécédents par f. Un antécédent appartenant à $]0, e[$ et un appartenant à $]e, +\infty[$.

   Ainsi les seuls réels admettant deux antécédents par f sont les réels de l'intervalle $]0, 1/e[$.

   Remarque : *Pour le moment, la rédaction ci-dessus (consistant à lire le tableau de variation) suffit pour répondre correctement à la question. Attention à ne pas oublier de dire que les réels n'appartenant pas à $]0, 1/e[$ admettent au plus un antécédent. Plus rigoureusement ces considérations découlent du théorème de la bijection, présenté en Terminale S (et dans le cours pour l'instant) comme un corollaire de théorème des valeurs intermédiaires. A partir du chapitre 13, il sera attendu que le théorème de la bijection soit cité lorsque vous répondez à cette question.*

5) a) Supposons que a et b soient deux entiers tels que $0 < a < b$ et $a^b = b^a$. Nous déduisons des questions précédente que a et b sont deux antécédents de la fonction f. Puisque $a < b$, nous obtenons que $a \in]1, e[$. Or le seul entier compris strictement entre 1 et e est 2. Ainsi $a = 2$.

   b) Nous avons montré que, si a et b sont deux entiers tels que $0 < a < b$ et $a^b = b^a$, alors $a = 2$. D'après la question $1b$, nous avons alors $b = 4$. Réciproquement $(2, 4)$ est solution de l'équation.
   Ainsi l'équation admet bien $(2, 4)$ pour unique solution.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton entraîne que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \text{et} \qquad (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = (1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \right).$$

Nous sommes en présence d'un produit de sommes. On peut donc le réécrire sous la forme d'une somme double (cf. formule de développement/factorisation vue en cours) :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{i+j}.$$

On remarque que $\binom{n}{k}$ est le coefficient du terme de degré n dans le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$.

Regardons à présent le coefficient du terme de degré n dans le polynôme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} X^{i+j}$.

Dans cette somme double, les termes d'indices (i, j) tels que $X^{i+j} = X^n$ sont tels que $i \in [\![0, n]\!]$ et $j = n - i$. Par conséquent le coefficient du terme de degré n est

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2,$$

puisque $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Nous en déduisons la formule par unicité des coefficients d'un polynôme à coefficients réels.

Quelques remarques générales :

- Si a et b sont des entiers, alors $[\![a, b]\!]$ n'est pas un intervalle mais un ensemble (fini) de nombres entiers : ceux compris entre a et b. Par ailleurs évitez les notations $]\!]a, b]\!]$, $[\![a, b[\![$ ou $]\!]a, b[\![$ ou $[\![a, +\infty[\![$ qui ne sont pas usuelles.
- Encore une fois, évitez à tout prix une phrase du type « $\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ »... C'est $\ln$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et non $\ln(x)$ qui est un nombre (d'ailleurs qu'est-ce que x ?).
- Lorsque vous procédez par implications, n'oubliez pas que le résultat obtenu n'est qu'une condition nécessaire et qu'il faut vérifier l'implication réciproque si on vous demande de montrer une équivalence.
- Attention à l'erreur grave qui consiste à affirmer que, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, alors $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Cela signifierait que le carré de la somme de réels est égal à la somme des carrés... et vous savez depuis bien longtemps que c'est faux (pour $n = 2$ en tout cas puisqu'il s'agit alors d'une identité remarquable). La confusion vient peut être du fait que l'indice dans les deux sommes est k. Rappelez-vous que les variables d'indice sont muettes et que l'on peut donc les remplacer par une autre (pas i et j néanmoins si on somme des nombres complexes). La bonne réponse a été montrée dans le cours :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} x_k x_\ell.$$