Devoir maison n° 2

À rendre le vendredi 22 septembre 2017

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est la résolution de l'équation $a^b = b^a$ où a et b sont des entiers naturels tels que $0 < a < b$.

1) a) Résoudre l'équation dans le cas où $a = 1$.
   b) Résoudre l'équation dans le cas où $a = 2$.
   On pourra trouver un entier naturel n_0 strictement supérieur à 2 pour lequel $2^{n_0} = n_0^2$ puis montrer que, pour tout $n > n_0$, $2^n > n^2$.
2) Introduisons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

   Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer que $a^b = b^a$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.
3) Étudier la fonction f (domaine de définition, continuité, dérivabilité, limites, etc.), dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.
4) Quels réels admettent exactement deux antécédents par f.
5) Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < a < b$ vérifiant $a^b = b^a$.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
   b) En déduire qu'il existe une unique solution au problème.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On utilisera le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, et on regardera le coefficient devant x^n.