Correction du DM n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1

1) a) On calcule que $u_1 = -1$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 19$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, posons $P(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ». Procédons par récurrence :

- *Initialisation :* On a $u_2 = 3 \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $P(2)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. On a donc $u_n \in \mathbb{N}^*$. Nous en déduisons que $u_{n+1} = 3u_n + 4n + 2$ est un entier naturel non nul (en effet $\mathbb{N}^*$ est stable par addition et par multiplication). Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, nous obtenons que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 4n + 2 > 0$ puisque $u_n > 0$ d'après la question précédente. On a de plus $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$, si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+1}{3^n} - \frac{u_n+1}{3^n-1} = \frac{u_{n+1}+1-3(u_n+1)}{3^n}$$
$$= \frac{u_{n+1}-3u_n-2}{3^n} = \frac{4n+2-2}{3^n} = \frac{4n}{3^n}$$

b) On peut procéder par récurrence... ou utiliser le résultat du cours sur les sommes télescopiques : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} = v_1 + \sum_{k=1}^{n} \big(v_{k+1} - v_k\big) = \frac{u_1+1}{3^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 0 + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k},$$

puisque le premier terme de la somme est nul. Enfin, si $n = 0$, alors $v_{n+1} = v_1 = 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k}$. La formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$w_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) + 2 = u_{n+1} + 2n + 4 = 3u_n + 4n + 2 + 2n + 4$$
$$= 3u_n + 6n + 6 = 3(u_n + 2n + 2) = 3w_n.$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.

b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3^n w_0 = 3^n$ et donc

$$u_n = w_n - 2n - 2 = 3^n - 2(n+1).$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{v_{n+1}}{4} = \frac{u_{n+1}+1}{4\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1}-2(n+2)+1}{4\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.$$

5) Donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$.

a) La fonction f_n est polynômiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

b) D'après le cours, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. De plus $f_n(1) = n+1$.

c) Nous avons donc également, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la formule puisque $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{n-1}$.

d) En particulier on a,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} &= \frac{1}{3}\,\frac{1 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{9}{4}\left(1 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{n - 3(n+1)}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}. \end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat de la question 4.

Exercice 2

Avant de commencer l'exercice on repère les opérations interdites. Il y en a trois successives : on prend la racine de $x+1$ (qui doit donc être positif), on prend le logarithme népérien de $1-x+\sqrt{x+1}$ (qui doit donc être strictement positif). On prend l'inverse de $\ln(1-x+\sqrt{x+1})$ (qui doit donc être non nul, c'est-à-dire $1-x+\sqrt{x+1} \neq 1$. Ensuite il suffit de rédiger cela proprement.

Soit x un réel. Le terme $\sqrt{x+1}$ est défini si et seulement si $x+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x > -1$.

Supposons désormais que $x \in [-1,+\infty[$. Le terme $\ln(1-x+\sqrt{x+1})$ est bien défini si et seulement si $1-x+\sqrt{x+1} > 0$.

- On remarque d'abord que, si $x \in [-1,1[$, alors $1-x > 0$ et donc $1-x+\sqrt{x+1} > 0$.
- Si $x \in [1,+\infty[$, alors on a

$$\begin{aligned} 1-x+\sqrt{x+1} > 0 &\iff \sqrt{x+1} > x-1 \\ &\iff x+1 > (x-1)^2 \qquad (\textit{car } x-1 \geqslant 0 \textit{ et } \sqrt{1+x} \geqslant 0) \\ &\iff x+1 > x^2-2x+1 \\ &\iff (3-x)x > 0 \\ &\iff 3 > x \qquad (\textit{car } x > 0) \end{aligned}$$

Ainsi $\ln(1-x+\sqrt{x+1})$ est bien défini si et seulement si $-1 \leqslant x < 3$.

Supposons dans la suite que $x \in [-1,3[$. Le terme $f(x)$ est bien défini si et seulement si $\ln(1-x+\sqrt{x+1}) \neq 0$, c'est-à-dire $1-x+\sqrt{x+1} \neq 1$.

- Si $x \in [-1,0[$, alors on a forcément $-x+\sqrt{x+1} \neq 0$ (puisqu'alors ce terme est strictement positif).

- Si $x \in [0, +\infty[$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} 1 - x + \sqrt{x+1} = 1 &\iff \sqrt{x+1} = x \\ &\iff x + 1 = x^2 \qquad (\textit{car } x \geqslant 0 \textit{ et } \sqrt{1+x} \geqslant 0) \\ &\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

En effet le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$ si bien que $x^2 - x - 1 = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (mais ce dernier cas est exclu puisque $x \geqslant 0$).

A la deuxième équivalence, nous avons utilisé le fait que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\ln(1 - x + \sqrt{x+1}) \neq 0$ si et seulement si $x \neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement, nous en déduisons que $D_f = \left[-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\right[$.

Exercice 3

Si un réel x est une solution de l'inéquation $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$, alors x est différent de 0.

Supposons que $x \neq 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x^6 + \frac{36}{x^2} > 13x^2 &\iff x^8 + 36 > 13x^4 \qquad (\textit{car } x^2 > 0) \\ &\iff \begin{cases} X^2 - 13X + 36 > 0 \\ X = x^4 \end{cases} \end{aligned}$$

Le trinôme $X^2 - 13X + 36$ admet pour discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 36 = 25 > 0$. Il admet donc deux racines réelles : $\dfrac{13+\sqrt{25}}{2} = 9$ et $\dfrac{13-\sqrt{25}}{2} = 4$. Par conséquent $X^2 - 13X + 36 > 0$ si et seulement si $X \in \,]-\infty, 4[\cup]9, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} x^6 + \frac{36}{x^2} > 13x^2 &\iff x^4 < 4 \text{ ou } x^4 > 9 \\ &\iff x^2 < 2 \text{ ou } x^2 > 3 \\ &\quad (\textit{car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff |x| < \sqrt{2} \text{ ou } |x| > \sqrt{3} \\ &\quad (\textit{car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

Quelques remarques générales :

- Laissez moi de l'espace au début de vos copies si vous voulez que j'écrive des commentaires.
- Encadrez ou soulignez les conclusions de vos questions.
- Inutile d'écrire l'énoncé de la question sur votre copie avant de la traiter... vous perdez du temps !
- Expliquez ce que vous faites.
- Chaque étape d'un raisonnement doit être justifié par un résultat du cours (sauf si l'étape est immédiate).
- Faites des phrases qui ont un sens (relisez vos phrases après les avoir écrites).
- Introduisez systématiquement toutes les variables que vous utilisez et ce à chaque question (c'est d'autant plus important quand la question 1b concerne $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et la suivante $n \in \mathbb{N}$). Généralement la première ligne d'une question doit être du type « Soit x un élément de E ».
- Un quantificateur ($\forall$, $\exists$) ne se trouve jamais en bout de phrase. Par ailleurs, si vous utilisez un symbole $\forall$ ou $\exists$ dans une phrase écrite en français, cela signifie que vous l'employez comme abréviation (ce qui est interdit... cf. mes conseils de rédaction de début d'année). Ainsi je vous conseille d'utiliser ces symboles le moins possible. Voici un exemple de bonne rédaction : supposons qu'on vous demande de montrer la formule « $\forall x \in E,\ P(x)$ » avec P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. Commencez la rédaction par « Soit $x \in E$ ». Ensuite poursuivez le raisonnement pour montrer que $P(x)$ est vraie et, seulement à la fin, vous pouvez écrire en guise de conclusion « Nous venons de montrer la proposition suivante : $\forall x \in E,\ P(x)$ ».
- Le commentaire précédent est valable aussi pour l'utilisation du symbole $\Longleftrightarrow$. Préférez « si et seulement si ».
- N'alignez pas de formules ou de propositions sans préciser le lien logique entre elles.
- Si vous avez la possibilité d'aligner des égalités, n'écrivez surtout pas des équivalents.
- Quand on veut déterminer le domaine de définition d'une fonction on fait cela dans un certain ordre : celui de la composition des fonctions. Dans l'exemple de l'exercice 2 on commence d'abord par s'occuper de la racine, puis du logarithme puis enfin de la fonction inverse.
- Diviser par 0 est impossible et votre premier réflexe cette année doit consister à repérer les cas où cela se produit (et les traiter séparément).