Correction du DM n° 17

Exercice 1 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1) a) Notons $\varphi : t \longmapsto t + \sin(t)$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = 1 + \cos(t) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $t \in \pi + 2\pi Z$. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

b) Par ailleurs $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc φ est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Puisque $\varphi(0) = 0$ et que φ est croissante sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons qu'elle ne s'annule qu'en 0. De plus elle est continue sur $\mathbb{R}$ si bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), la fonction g est continue sur le segment $[x, 2x]$ (resp. $[2x, x]$) et donc $\boxed{f(x) \text{ est bien définie.}}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $-x \in \mathbb{R}^*$ et le changement de variable $u = -t$ donne

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t + \sin(t)}\, dt = \int_{x}^{2x} \frac{-du}{-u + \sin(-u)} = \int_{x}^{2x} \frac{du}{u + \sin(u)} = f(x).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est une fonction paire sur } \mathbb{R}^*}$

2) a) Soit G une primitive de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

On ne parle pas de primitive de g sur $\mathbb{R}^*$ car ce n'est pas intervalle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $f(x) = G(2x) - G(x)$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x).$$

La parité de f entraîne que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = -f'(-x) = -2g(-2x) + g(-x) = 2g(2x) - g(x).$$

Résumons : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{2}{2x + \sin(2x)} - \dfrac{1}{x + \sin(x)}.}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{2x + 2\sin(x) - 2x - \sin(2x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin(x))} = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(2x + \sin(2x))(x + \sin(x))}.$$

Ensuite

- $x + \sin(x) \underset{0}{=} x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x$ et donc $2x + \sin(2x) \underset{0}{\sim} 4x$.
- $2\sin(x) - \sin(2x) \underset{0}{=} 2\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(2x - \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) = -\dfrac{2x^3}{6} + \dfrac{8x^3}{6} + o(x^3)$ donc $2\sin(x) - \sin(2x) \underset{0}{\sim} x^3$.

Ainsi $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{2x\, 4x}$ et donc $\boxed{f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{8}.}$

c) On en déduit que $\boxed{f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.}$

d) On ne peut rien conclure a priori. Pensons par exemple à la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. Celle-ci admet donc 0 pour limite en 0 bien que la fonction ne soit pas continue en 0.

3) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t-1 \leqslant \sin(t) \leqslant t+1$. Puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous ne déduisons que

$$\forall t \in]1,+\infty[, \qquad \frac{1}{t+1} \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t-1}.$$

Soit $x \in]1,+\infty[$. En intégrant, nous obtenons

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\, dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t+1}$$

c'est-à-dire

$$[\ln(t+1)]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant [\ln(t-1)]_x^{2x}$$

et donc

$$\boxed{\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right).}$$

b) Puisque $\dfrac{2x+1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et $\dfrac{2x-1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, puisque $\ln$ est continue en 2 et par encadrement, nous en déduisons que $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)}$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). La fonction h est continue sur le segment $[x, 2x]$ (resp. $[2x, x]$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\, dt$ est bien définie. De plus, par linéarité

$$f(x) - \int_x^{2x} h(t)\, dt = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{t-\sin(t)}{2t(t+\sin(t))}\right) dt = \int_x^{2x} \frac{2t-t+\sin(t)}{2t(t+\sin(t))}\, dt$$

$$= \int_x^{2x} \frac{1}{2t}\, dt = \left[\frac{\ln(t)}{2}\right]_x^{2x} = \boxed{\frac{\ln(2)}{2}.}$$

b) On a $h(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^3/6}{2t(2t)} = \dfrac{t}{24}$. Par conséquent $\boxed{h(t) \underset{0}{=} \dfrac{t}{24} + o(t).}$ Nous en déduisons que $h(t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{h \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } h(0)=0.}$

c) Nous en déduisons que H admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $H(x) \underset{0}{=} H(0) + \dfrac{x^2}{48} + o(x^2)$.

Puisque $H(0) = 0$, on a $\boxed{H(x) \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{48} + o(x^2).}$

d) Au voisinage de 0, on a

$$\int_x^{2x} h(t)\, dt = H(2x) - H(x) \underset{0}{=} \left(\frac{(2x)^2}{48} + o(x^2)\right) - \left(\frac{x^2}{48} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} \left(\frac{4x^2}{48} - \frac{x^2}{48}\right) + o(x^2) \underset{0}{=} \frac{x^2}{16} + o(x^2).$$

Or, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\, dt$. Ainsi

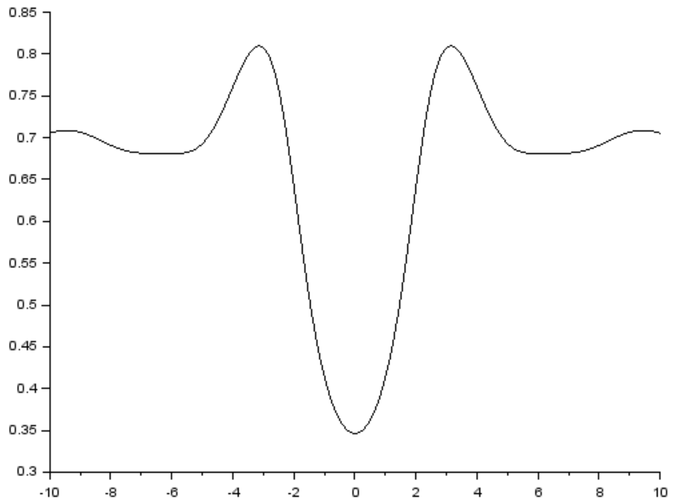
$$\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{\ln(2)}{2} + \frac{x^2}{16} + o(x^2).}$$

Nous en déduisons que $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = \dfrac{\ln(2)}{2}}$. De plus $\boxed{\text{son prolongement est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = 0.}$

5) a)

```
function y=DM17(x)
if     x==0    then
       y=log(2)/2;
else
       n=10000; a=x; b=2*x; y=0;
       for   k=0:(n-1)
             t=a+k*(b-a)/n;
             y=y+1/(t+sin(t));
       end
       y=y*x/n;
end
endfunction
```

b) On utilise les commande `X=linspace(-10,10,1000); fplot2d(X,DM17)`



Exercice 2 : Développements limités en vrac

1) Puisque $2x - x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(2x - x^2) &\underset{0}{=} (2x - x^2) - \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o\big((2x-x^2)^6\big)\\
&\underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6}{3!} + \frac{32x^5 - 5(2x)^4x^2}{5!} + o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 - x^5 + \frac{x^6}{6} + \frac{4x^5}{15} - \frac{2x^6}{3} + o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 - \frac{11x^5}{15} - \frac{x^6}{2} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Puisque $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\cos(x^2) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^6)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sin(2x - x^2)\cos(x^2) &\underset{0}{=} \left(2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 - \frac{11x^5}{15} - \frac{x^6}{2}\right)\left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)\\
&\underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 - \frac{11x^5}{15} - \frac{x^6}{2} - x^5 + \frac{x^6}{2} + o(x^6)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sin(2x - x^2)\cos(x^2) \underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 - \frac{26x^5}{15} - x^5 + o(x^6).}$

2) Puisque $3x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1+3x^2}} = (1+3x^2)^{-1/5} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{5}(3x^2) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}-1\right)\frac{(3x^2)^2}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}-1\right)\left(-\frac{1}{5}-2\right)\frac{(3x^2)^3}{6} + o(x^6)$$
$$\underset{0}{=} 1 - \frac{3x^2}{5} + \frac{27x^4}{25} - \frac{297}{125}x^6 + o(x^6)$$

On aussi $\tan(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$. Ainsi

$$\frac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}} \underset{0}{=} \left(1 - \frac{3x^2}{5} + \frac{27x^4}{25} - \frac{297}{125}x^6 + o(x^6)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\right)$$
$$\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{3x^3}{5} - \frac{x^5}{5} + \frac{27x^5}{25} + o(x^6)$$

donc $\boxed{\dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}} \underset{0}{=} x - \dfrac{4x^3}{15} + \dfrac{76x^5}{75} + o(x^6).}$

3) Puisque $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{2018} = (1+x^2)^{-2018} \underset{0}{=} 1 - 2018(x^2) + (-2018)(-2018-1)\frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} 1 - 2018x^2 + \frac{2018\,2019}{2}x^4 + o(x^4)$$

donc $\boxed{\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{2018} \underset{0}{=} 1 - 2018x^2 + 2037171x^4 + o(x^4).}$

4) On a $3\tan(x) - 3x - x^3 \underset{0}{=} 3\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) - 3x - x^3 \underset{0}{=} \dfrac{2x^5}{5} + o(x^5) \underset{0}{\sim} \dfrac{2x^5}{5}$. De plus

$$e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e = e\left(e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}-1} - 1\right) \underset{0}{\sim} e\left(\sqrt{1+\sin(x^3)} - 1\right) \underset{0}{\sim} e\frac{\sin(x^3)}{2} \underset{0}{\sim} \frac{ex^3}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{5e}{4x^2}.}$

5) On a

$$\frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{\alpha}{x} + \beta = \frac{xe^x + \alpha\ln(1+x) + \beta x\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{xe^x + \alpha\ln(1+x) + \beta x\ln(1+x)}{x^2}.$$

On cherche donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xe^x + \alpha\ln(1+x) + \beta x\ln(1+x) \underset{0}{\sim} o(x^2)$. On a

$$xe^x + \alpha\ln(1+x) + \beta x\ln(1+x) = x + x^2 + \alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \beta x^2 + o(x^2) = (1+\alpha)x + \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \beta\right)x^2 + o(x^2).$$

On trouve donc $\boxed{\alpha = -1}$ et $\boxed{\beta = -\dfrac{3}{2}.}$ On a alors

$$\frac{e^x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \underset{0}{\sim} \frac{xe^x - \ln(1+x) - \frac{3}{2}x\ln(1+x)}{x^2}.$$

Poussons le développement limité plus loin :

$$xe^x - \ln(1+x) - \frac{3}{2}x\ln(1+x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{4} + o(x^3)$$
$$\underset{0}{=} \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^3}{4} + o(x^3) = \frac{11x^3}{12} + o(x^3).$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{e^x}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2} \underset{0}{\sim} \dfrac{11x}{12}.}$

6) *Puisqu'on multiplie par $x^2 - x + 2$, pour avoir au moins un développement asymptotique à l'ordre 1, il faut pousser le développement de $\dfrac{e^{-1/x}}{1+x}$ jusqu'à l'ordre 3 puisque le terme en $\dfrac{1}{x^3}$ va devenir $\dfrac{1}{x}$ lorsqu'on va le multiplier par x^2.*

On a

$$\frac{e^{-1/x}}{x+1} = \frac{1}{x}\frac{e^{-1/x}}{1+\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Ainsi

$$\frac{x^2 - x + 2}{x+1}e^{-1/x} \underset{+\infty}{=} (x^2 - x + 2)\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} x - 2 + \frac{5}{2x} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} x - 3 + \frac{13}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet pour asymptote } y = x - 3 \text{ en } +\infty}$. De plus $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

On obtient de même

$$\frac{x^2 - x + 2}{x+1}e^{-1/x} \underset{-\infty}{=} x - 3 + \frac{13}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet pour asymptote } y = x - 3 \text{ en } -\infty}$. De plus $\mathscr{C}_f$ est en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

Preuve alternative : Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, on a

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2\right)\frac{e^x}{1 + \frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x} - 1 + 2x\right)\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

Ensuite

$$\frac{e^x}{x+1} \underset{0}{=} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{0}{=} 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Ainsi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{=} \left(\dfrac{1}{x} - 1 + 2x\right)\left(1 - 2x + \dfrac{5x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x} - 3 + \dfrac{13x}{2} + o\left(x\right)$ et donc

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} x - 3 + \frac{13}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dans cet exercice, on suppose que $\alpha > 1$ de telle sorte que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. On a alors $R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on s'intéresse ici à la vitesse de convergence vers 0.

1) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $t \in [k-1,k]$, on a $0 \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ donc, en intégrant,

$$0 \leqslant \frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $(n,N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant n < N$. On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^N = \frac{n^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Faisons tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité montrée à la question précédente :

$$0 \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Ainsi on a $\boxed{0 \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{M}{n^{\alpha-1}} \text{ avec } M = \frac{1}{\alpha-1}}$.

3) Puisque $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, le théorème de convergence des séries à termes positifs entraîne que $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ converge et donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Ensuite donnons-nous $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|n^\alpha u_n| \leqslant \varepsilon(\alpha-1)$. Pour tout $(n,N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leqslant n < N$, on a donc

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |u_k| \leqslant \varepsilon(\alpha-1)R_n(\alpha) \leqslant \frac{\varepsilon}{n^{\alpha-1}}.$$

Faisons tendre N vers $+\infty$ et nous en déduisons que $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)}$.

4) Pour tout $n \geqslant 1$, posons $v_n = R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

a) On a

$$\begin{aligned}(1-x)^{1-\alpha} &\underset{0}{=} 1 + (1-\alpha)(-x) + (1-\alpha)(1-\alpha-1)\frac{(-x)^2}{2!} \\ &\quad + (1-\alpha)(1-\alpha-1)(1-\alpha-2)\frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 - (1-\alpha)x - (1-\alpha)\alpha\frac{x^2}{2} - (1-\alpha)\alpha(\alpha+1)\frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\frac{1-(1-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{0}{=} x + \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha+1)\frac{x^3}{6} + o(x^3).}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n-1} - v_n &= R_{n-1}(\alpha) - R_n(\alpha) - \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\
&= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{n^\alpha} - n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{n} + \alpha\frac{1}{2n^2} + \alpha(\alpha+1)\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{v_{n-1} - v_n \underset{+\infty}{=} -\frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = v_{n-1} - v_n + \frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}}.$$

D'après la question précédente, $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$. La question 3 entraîne alors que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k-1} - v_k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{6k^{\alpha+2}} \\
&= v_n + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}R_n(\alpha+2) \\
&= R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}R_n(\alpha+2).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}R_n(\alpha+2) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).}$$

5) D'après la question 3, on a

- $0 \leqslant R_n(\alpha+1) \leqslant \frac{1}{\alpha n^\alpha}$ donc $R_n(\alpha+1) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$,
- $0 \leqslant R_n(\alpha+2) \leqslant \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}$ donc $R_n(\alpha+2) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

Ainsi $\boxed{R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).}$

6) Cette dernière formule est vraie pour tout $\alpha > 1$. Ainsi $R_n(\alpha+1) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\alpha n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Il découle alors de la question 4c que

$$R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \underbrace{- \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}R_n(\alpha+2) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}_{\underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$

donc $\boxed{R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).}$

7) Cette dernière formule est vraie pour tout $\alpha > 1$. Ainsi $R_n(\alpha+1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{\alpha n^\alpha} - \dfrac{1}{2n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et

$$R_n(\alpha+2) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} - \frac{1}{2n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Il découle alors de la question 4c que

$$\begin{aligned} R_n(\alpha) &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right) \\ &\quad - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\left(\frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{6n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{2n^\alpha} + \dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right).}$

Quelques remarques générales :

- Dire qu'une fonction φ est croissante et que $\varphi(0) = 0$ ne suffit pas pour conclure que $1/\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Il faut aussi qu'elle soit strictement croissante au voisinage de 0.
- Soyez précis : on parle d'**une** primitive sur un **intervalle** (attention $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle).
- La phrase « f est paire si $f(x) = f(-x)$ » est fausse. En effet qu'est ce que x ici ? La bonne phrase est « f est paire si, pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(x) = f(-x)$. »
- Pour la énième fois : dans une fonction Scilab il n'y a ni `input` ni `disp`. On utilise la syntaxe `function y=f(x)` où `x` est l'argument d'entrée et `y` l'argument de sortie qui sera automatiquement affiché lorsqu'on va taper `f(x)` (avec un `x` particulier) dans la console.
- Si $f : x \longmapsto \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$, alors il est incorrect de dire que f est dérivable car φ l'est (ce n'est pas faux mais ça ne découle pas de la dérivabilité en tant que telle). Le bon argument est « f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car φ est continue donc admet une primitive Φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et on en déduit que f est dérivable. » Par ailleurs il est complètement faux d'en déduire que $f'(x) = \int_x^{2x} \varphi'(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Dans un développement asymptotique, on ne doit avoir que des termes du type $\dfrac{1}{x^k}$ et non $\dfrac{1}{(x+1)^k}$. Si on rencontre ce dernier, on écrit que
$$\frac{1}{(1+x)^k} = \frac{1}{x^k}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-k} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x^k}\left(1 - \frac{k}{x} + \frac{k(k+1)}{2x^2} + \dots\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x^k} - \frac{k}{x^{k+1}} + \frac{k(k+1)}{2x^{k+2}} + \dots$$
Ça ne change rien si on cherche un équivalent mais il y a donc des termes en plus si on cherche un développement à un ordre supérieur. Pour éviter de se tromper, on commence par faire le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ et on se ramène en 0.
- Lorsqu'on dispose d'un développement asymptotique du type $U_k = \dfrac{a_0}{k^\alpha} + \dfrac{a_1}{k^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$, on ne peut pas juste sommer (k allant de $n+1$ à $+\infty$) chaque terme sans apporter davantage de justification. En effet aucun résultat du cours ne vous permet de conclure. Par contre la question 3 de l'exercice 3 vous permettait de le faire en disant que $V_k = U_k - \dfrac{a_0}{k^\alpha} - \dfrac{a_1}{k^{\alpha+1}} = o\left(\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$ et donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} V_k = o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$.
- Pour la énième fois, on n'écrit jamais $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir justifié la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
- Lorsqu'on forme un développement (limité comme asymptotique) d'une somme de plusieurs termes à un ordre donné r, on vérifie bien qu'on dispose d'un développement de chaque terme à l'ordre r (sinon des termes seront manquants et le résultat faux)... vous trouverez un exemple à la dernière question de l'exercice 3.