Devoir maison n$^{\text{o}}$ 17

À rendre le mercredi 2 mai 2018

Ce devoir est obligatoire. *Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.*

Exercice 1 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin(t)}.$$

1) Posons $g : t \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{t+\sin(t)}$.
   a) Étudier brièvement les variations de la fonction $t \longmapsto t+\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   c) Montrer que f est une fonction paire.
2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
   On pourra utiliser la parité de f sur $\mathbb{R}^*$ afin d'éviter un piège classique... lequel d'ailleurs ?
   b) Déterminer un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0.
   c) En déduire que f' admet une limite finie en 0.
   d) Peut-on en déduire que f est continue et dérivable en 0 ?
3) a) En encadrant $g(t)$ pour $t > 1$, montrer que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right).$$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
4) Posons $h : t \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{t-\sin(t)}{2t(t+\sin(t))}$.
   a) Calculer $f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,dt$ pour tour $x \in \mathbb{R}^*$.
   b) Donner le développement limité de h en 0 à l'ordre 1. En déduire que h se prolonge par continuité en 0 (on note toujours h ce prolongement).
   On pourra essayer d'en donner un équivalent en 0 pour commencer.
   c) Soit H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donner le développement limite de H en 0 à l'ordre 2.
   d) En déduire le développement limite de f en 0 à l'ordre 2. En déduire que f se prolonge par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
5) a) Écrire une fonction Scilab qui prend entrée un réel x et qui renvoie la valeur de $f(x)$.
   On pourra utiliser une structure conditionnelle qui renvoie la valeur de $f(0)$ calculée dans la question précédente dans le cas où $x = 0$ et qui renvoie une approximation de $f(x)$ obtenue avec la méthode des rectangles dans le cas où $x \neq 0$.
   b) Écrire une commande Scilab qui trace la fonction f sur l'intervalle $[-10, 10]$.
   On utilisera `fplot2d`.

Exercice 2 : Développements limités en vrac

1) Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sin(2x - x^2)\cos(x^2)$ en 0 à l'ordre 6.
2) Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}}$ en 0 à l'ordre 6.
3) Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{2018}$ en 0 à l'ordre 4.
4) Déterminer un équivalent de $\dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3}$ quand x tend vers 0.
5) Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x}{\ln(1+x)} + \dfrac{\alpha}{x} + \beta\right) = 0$. Donner-en ensuite un équivalent lorsque x tend vers 0.
6) Déterminer les asymptotes en $\pm\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} e^{-1/x}$ et la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec ses asymptotes.

Exercice 3 : Étude de la vitesse de convergence de séries de Riemann

Dans cet exercice, on suppose que $\alpha > 1$ de telle sorte que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n(\alpha) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. On a alors $R_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et on s'intéresse ici à la vitesse de convergence vers 0.

1) Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant n < N$. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2) En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que, $0 \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \dfrac{M}{n^{\alpha-1}}$.
3) Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Justifier que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge et que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

   On commencera par fixer $\varepsilon > 0$ et par montrer que, pour n assez grand, $u_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{Mn^\alpha}$.
4) Pour tout $n \geqslant 1$, posons $v_n = R_n(\alpha) - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
   a) Donner le développement limité de $x \longmapsto \dfrac{1-(1-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ à l'ordre 3 en 0.
   b) En déduire que
   $$v_{n-1} - v_n \underset{+\infty}{=} -\frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).$$
   c) En sommant cette égalité (et en utilisant la question 3), montrer soigneusement que
   $$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6} R_n(\alpha+2) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$
5) Montrer que $R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

   On remarquera que cette formule est vraie pour tout $\alpha > 1$, en particulier si on remplacer α par $\alpha+1$ ou $\alpha+2$...
6) En déduire que $R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{2n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
7) En déduire enfin que $R_n(\alpha) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{2n^\alpha} + \dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.