Correction du DM n° 16

Exercice 1 : Formule de Taylor-Lagrange et applications

1) a) Puisque $b \neq a$, on a $(b-a)^{n+1} \neq 0$ et donc

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-x)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right)$$

D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité du réel } A.}$

b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

- la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a,b]$ car f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$,
- la fonction $x \longmapsto (b-x)^k$ est dérivable sur $[a,b]$.

Puisque c'est aussi le cas de la fonction $x \longmapsto (b-x)^{n+1}$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } [a,b]}$.
Ensuite, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right) - \frac{A(b-x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{A(b-x)^n}{n!} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(b-x)^{j-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{A(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{A(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - A \right)
\end{aligned}$$

c) On a $\varphi(a) = f(b)$ (puisque A a été choisi pour cela) et $\varphi(b) = f(b)$. De plus f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Par conséquent $\boxed{\text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } \varphi'(c) = 0,}$ d'après le théorème de Rolle.

d) On a donc $\dfrac{(b-c)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(c) - A \right) = \varphi'(0) = 0$. Puisque $c \neq 0$, on a $A = f^{(n+1)}(c)$. Ainsi

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).}$$

2) a) Si $n = 0$, alors la conclusion du théorème se reformule ainsi : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$. Il s'agit du $\boxed{\text{théorème des accroissements finis.}}$

b) Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I telle que $f^{(n+1)}$ est bornée par $M > 0$ sur I. Pour tout $(a,b) \in I$ tel que $a \neq b$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| = \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette preuve est plus intéressante car elle demande une hypothèse plus faible : $f^{(n+1)}$ doit être bornée sur I mais pas forcément continue sur I.

3) a) Puisque f est de classe C^2 sur I, appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

- Il existe $c_1 \in \left]\frac{a+b}{2}, a\right[\subset]a,b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(c_1)}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2} + \frac{(a-b)^2}{8}f''(c_1). \end{aligned}$$

- Il existe $c_2 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[\subset]a,b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(c_2)}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{(a-b)^2}{8}f''(c_2). \end{aligned}$$

Additionnons ces deux formules :

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big).$$

On a donc

$$\boxed{\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{16}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big).}$$

b) La fonction f'' est continue sur le segment $[c_1, c_2]$ et $\frac{1}{2}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big) \in [f''(c_1), f''(c_2)]$. Par conséquent le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe $c \in [c_1, c_2] \subset]a,b[$ tel que $f''(c) = \frac{1}{2}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big)$. Ainsi

$$\boxed{\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(c).}$$

4) a) $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^*}$ comme produit de deux fonctions qui le sont. Par ailleurs

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0),$$

puisque f est dérivable en 0. Ainsi $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } g(0) = f'(0).}$

b) La fonction inverse est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{-3!}{x^4}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{4!}{x^5}, \qquad \cdots$$

Une récurrence immédiate montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

La fonction f est de classe C^∞ donc la formule de Leibniz entraîne que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^n(-1)^k(n-k)!x^{k-1}}{x^n}$$

et donc $\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(-x)^k}{k!}.}$

c) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction f : il existe $c_x \in]x, 0[$ tel que

$$0 = f(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)(0-x)^k}{k!} + \frac{(0-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) = g^{(n)}(x) \frac{x^{n+1}}{(-1)^n n!} + \frac{(0-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x).$$

Ainsi

$$g^{(n)}(x) \frac{x^{n+1}}{(-1)^n n!} = -\frac{(0-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)\, n!} f^{(n+1)}(c_x)$$

et donc $\boxed{g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{n+1}.}$

d) Puisque $c_x \in]x, 0[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le théorème d'encadrement entraîne que $c_x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Puisque $f^{(n+1)}$ est continue en 0, nous en déduisons que $\boxed{f^{(n+1)}(c_x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f^{(n+1)}(0).}$

e) Nous en déduisons que $g^{(n)}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Le théorème de prolongement de la dérivée (appliqué aux dérivées successives par récurrence) entraîne que $\boxed{g \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Exercice 2 : Equivalents et limites

1) On a

$$\frac{x \operatorname{Arctan}(2x) \sqrt[5]{\ln(1+x)}}{1 + x^2 - \cos(\sqrt{x})} \underset{0^+}{\sim} \frac{x \cdot 2x \cdot \frac{1}{5} \ln(1+x)}{x^2 + 1 - \cos(\sqrt{x})} \underset{0^+}{\sim} \frac{x \cdot 2x \cdot \frac{x}{5}}{x^2 + 1 - \cos(\sqrt{x})}$$

puisque $\ln(1+x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Or $1 - \cos(\sqrt{x}) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} = \dfrac{x}{2}$ puisque $\sqrt{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, puisque $x^2 \underset{0^+}{=} 0(x)$,

$$x^2 + 1 - \cos(\sqrt{x}) = x^2 + \frac{x}{2} + o(x) = \frac{x}{2} + o(x)$$

et donc

$$\frac{x \operatorname{Arctan}(2x) \sqrt[5]{\ln(1+x)}}{1 + x^2 - \cos(\sqrt{x})} \underset{0^+}{\sim} \frac{\frac{2x^3}{5}}{\frac{x}{2}} \underset{0^+}{\sim} \boxed{\frac{4x^2}{5}.}$$

2) Soit t au voisinage de 0. Posons

$$u(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{\tan(t) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan(t)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1 = \frac{1 + \tan(t)}{1 - \tan(t)} - 1 = \frac{2\tan(t)}{1 - \tan(t)} \underset{0^+}{\sim} 2\tan(t) \underset{0^+}{\sim} 2t.$$

Nous en déduisons que, au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$, $\tan(x) = 1 + u\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ avec $u(x) \underset{\pi/4}{\sim} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Nous avons alors $\ln(\tan(x)) = \ln\left(1 + u\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \underset{\pi/4}{\sim} u\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \underset{\pi/4}{\sim} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Ainsi

$$\frac{\ln(\tan(x))}{4x - \pi} \underset{\pi/4}{\sim} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \underset{x \to \pi/4}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Finalement

$$\Big(\tan(x)\Big)^{1/(4x-\pi)} = \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{4x - \pi}\right) \underset{x \to \pi/4}{\longrightarrow} \boxed{\sqrt{e}},$$

par continuité de la fonction exponentielle en $1/2$.