Devoir maison n° 16

À rendre le mardi 10 avril 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Si a et b sont deux réels tels que $a > b$, alors on adopte la convention que $[a, b]$ désigne l'intervalle $[b, a]$.

Exercice 1 : Formule de Taylor-Lagrange et applications

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \neq b$. On considère la fonction

$$\varphi : x \in [a, b] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

où A est un réel vérifiant

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{A(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1) a) Justifier l'existence et l'unicité du réel A.

   b) Montrer que φ est dérivable sur $[a, b]$ et calculer φ'.

   c) Montrer soigneusement qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

   d) En déduire la formule de Taylor-Lagrange :

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \neq b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

2) a) Comment s'appelle ce théorème dans le cas où $n = 0$?

   b) Supposons que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I. Proposer une démonstration de l'inégalité de Taylor-Lagrange à partir de cette formule. En quoi est-ce plus intéressant que la preuve vue en cours ?

3) Supposons que f est de classe C^2 sur I.

   a) Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, qu'il existe c_1 et c_2 dans $]a, b[$ tels que

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{16}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big).$$

   b) En déduire, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in]a, b[$,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

4) Supposons que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

   a) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que g est prolongeable par continuité en 0.

   b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(-x)^k}{k!}.$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f, montrer qu'il existe $c_x \in]x, 0[$ tel que $g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{n+1}$.

   d) Montrer que $f^{(n+1)}(c_x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f^{(n+1)}(0)$.

   e) A l'aide du théorème de prolongement de la dérivée (cf. chapitre 13), montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 2 : Equivalents et limites

---

1) Déterminer un équivalent simple de $x \longmapsto \dfrac{x\,\mathrm{Arctan}(2x)\sqrt[5]{\ln(1+x)}}{1 + x^2 - \cos(\sqrt{x})}$ en 0^+.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \Big(\tan(x)\Big)^{1/(4x-\pi)}$.
   En utilisant la formule de duplication de la tangente, on pourra commencer par montrer que, au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$, $\tan(x) = 1 + u\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ *avec* $u(t) \underset{0}{\sim} 2t$.