Correction du DM n$^{\text{o}}$ 15

Exercice 1 : Endomorphismes tels que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On cherche dans cet exercice des conditions sur f pour que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

1) Si f est un automorphisme de E, alors f est injective et surjective et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$. On a bien $\boxed{\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E.}$

2) Le but de cet question est de montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \end{cases}$

   a) • Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).}$
   Si $x \in \mathrm{Im}(f^2)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y)$. Si on pose $z = f(y) \in E$, on a $x = f(z) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).}$

   b) Supposons que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.
   - Si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0$ et donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, nous en déduisons que $f(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f).}$
   - Si $x \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Puisque $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$, il existe $s \in E$ et $t \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $y = f(s)+t$. On a donc $x = f(y) = f^2(s)+f(t) = f^2(s)+0 \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2).}$

   c) Supposons que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
   - Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0$ et il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x = f(y)$. On a $f^2(y) = f(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Cela signifie que $x = f(y) = 0$. Nous en déduisons que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.}$
   - Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. Ainsi $f\big(x - f(y)\big) = 0$ et donc $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent $x = f(y) + x - f(y) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$. Nous en déduisons que $\boxed{E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E.}$

   d) Nous venons de montrer que, si $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$, alors $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$ et donc $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$. Réciproquement, si $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$, alors les questions a et b entraînent que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. C'est ce que l'on voulait démontrer.

3) a) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On a alors $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ donc
$$\frac{1}{a_1}P = X + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1} X^k.$$
   Il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{1}{a_0}$ et $Q = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1} X^{k-2}$ et $\boxed{\lambda P(X) = X - Q(X)X^2.}$

   b) Il en découle que $\boxed{f = \lambda P(f) + Q(f) \circ f^2 = Q(f) \circ f^2 = f^2 \circ Q(f),}$ puisque deux polynômes d'un même endomorphismes commutent.

   c) • Si $x \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y) = f^2\big(Q(f)(y)\big) \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2).}$

- Si $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0$ donc $f(x) = Q(f)\big(f^2(x)\big) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f).}$

d) D'après la question 2, nous en déduisons que $\boxed{\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E.}$

e) C'est classique : si $P(0) \neq 0$, alors f est un automorphisme (et on exprime f^{-1} en fonction des puissances de f) et donc $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$ d'après la question 1.

L'identité est annulée par le polynôme $P = X^3 - X^2$ qui vérifie $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. Pourtant on a $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E) = E$.

Ces deux arguments entraîne $\boxed{\text{qu'il ne s'agit pas d'une condition nécessaire.}}$

Exercice 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y\big)$$

1) Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')\\
&= \big(-(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z'), 4(\lambda x + x') + 5(\lambda y + y') + 4(\lambda z + z'), -(\lambda x + x') - (\lambda y + y')\big)\\
&= \big(\lambda(-x-2y-2z) + (-x'-2y'-2z'), \lambda(4x+5y+4z) + (4x'+5y'+4z'), \lambda(-x-y) + (-x'-y')\big)\\
&= \lambda\big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y\big) + \big(-x'-2y'-2z', 4x'+5y'+4z', -x'-y'\big)\\
&= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z').
\end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) a) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&f^2(x,y,z)\\
&\quad= f(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y)\\
&\quad= \big(-(-x-2y-2z) - 2(4x+5y+4z) - 2(-x-y),\\
&\qquad 4(-x-2y-2z) + 5(4x+5y+4z) + 4(-x-y), -(-x-2y-2z) - (4x+5y+4z)\big)\\
&\quad= \big(x+2y+2z-8x-10y-8z+2x+2y,\\
&\qquad -4x-8y-8z+20x+25y+20z-4x-4y, x+2y+2z-4x-5y-4z\big)\\
&\quad= \big(-5x-6y-6z, 12x+13y+12z, -3x-3z-2z\big)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f^2(x,y,z) + 2(x,y,z) = \big(-3x-6y-6z, 12x+15y+12z, -3x-3z\big) = 3f(x,y,z).$$

Ainsi $\boxed{f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$

b) On a donc $\dfrac{3}{2}f - \dfrac{1}{2}f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f \circ \left(\dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f\right) = \left(\dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f\right) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est un automorphisme et } f^{-1} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f.}$ On a donc

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f^{-1}(x,y,z) = \left(2x+y+z, -2x-y-2z, \frac{x+y+3z}{2}\right).$$

3) - Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_1 \quad &\iff \quad \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0\\ 4x + 4y + 4z = 0\\ -x - y - z = 0 \end{cases}\\
&\iff \quad x+y+z = 0\\
&\iff \quad (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)
\end{aligned}$$

Ainsi $E_1 = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)$. Et on vérifie que $\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)$ est une famille libre donc une base de E_1.

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in E_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ -y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y = 2z \\ y = -4z \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = -4z \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = z(2,-4,1)
\end{aligned}$$

Ainsi $E_2 = \mathrm{Vect}\big((2,-4,1)\big)$. La famille $\big((2,-4,1)\big)$ est donc une base de E_2.

4) a) On remarque que $\boxed{f = 2p+q.}$

b) Puisque $2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et f commutent, on a

$$\begin{aligned} q\circ q = (2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f)^2 &= 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 4f + f^2 \\ &= 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 4f + 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f = q. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et f commutent, on a

$$\begin{aligned} p\circ p = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 &= f^2 - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \\ &= 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = p. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}}$. On a enfin

$$p\circ q = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\circ(2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f) = f\circ(2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f) - (2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f) = 2f - f^2 - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + f = 0.$$

$$q\circ p = (2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f)\circ(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) - f\circ(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f^2 + f = 0.$$

On a bien $\boxed{p\circ q = q\circ p = 0.}$

c) On peut raisonner par récurrence. Mais puisque $2p$ et q commutent, la formule du binôme de Newton entraîne directement que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k \circ q^{n-k} = q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p\circ q + 2^n p^n = q^n + 0 + 2^n p^n = 2^n p + q.$$

En effet p et q sont des projecteurs donc $p^k = p$ et $q^k = q$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5) Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a $(x,y,z) = q(x,y,z) + p(x,y,z)$. De plus

$$(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(q(x,y,z)) = p\circ q(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(p(x,y,z)) = -q\circ p(x,y,z) = (0,0,0)$$

donc $p(x,y,z)\in E_2$ et $q(x,y,z)\in E_1$. Nous en déduisons que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

Si $(x,y,z)\in E_1\cap E_2$, alors $x+y+z=0$, $x=2z$ et $y=-4z$. Ainsi $-z = 2z - 4z + z = 0$ donc $z=0$ et $x=y=0$. Ainsi $E_1\cap E_2 = \{(0,0,0)\}$. Nous en déduisons que $\boxed{E_1\oplus E_2 = \mathbb{R}^3.}$

Quelques remarques générales :

- Évitez de diviser par un polynôme (ici par X^2 dans la question 3a de l'exercice 1) car ça ne donne pas un polynôme en général. On se retrouve plutôt avec une fraction rationnelle dont la théorie formelle n'est pas au programme d'ECS donc prudence. Ici on préférera diviser par x^2 pour tout $x \neq 0$ (rappelez vous que X^2 désigne une fonction). Regardez bien ma preuve.
- On ne divise JAMAIS par un endomorphisme (ici par f^2 dans la question 3b de l'exercice 1). C'est une erreur très grave car a priori il n'y a aucune raison qu'il prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, dire qu'il existe g tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$ ne suffit pas. Il faut aussi dire que $g \circ f = \mathrm{Id}$ (cf. question 2b de l'exercice 2) sinon c'est incomplet (sauf en dimension finie mais on n'a pas encore vu ce chapitre et ici on ne sait pas si la dimension est finie de toute façon).
- Écrire $f^2 = \big(-5x - 6y - 6z, 12x + 13y + 12z, -3x - 3z - 2z\big)$ (ou autre expression de ce genre... j'en ai vu plein) n'a aucun sens. D'un côté on a une application et de l'autre un vecteur. Ici c'est plutôt $f^2(x, y, z) = \big(-5x - 6y - 6z, 12x + 13y + 12z, -3x - 3z - 2z\big)$ qu'il faut écrire.
- Dans le binôme de Newton, il faut que les deux endomorphismes en jeu commutent. Si c'est le cas, n'oubliez pas de le dire pour avoir tous les points.
- Si F et G sont des s.e.v de E, il n'est pas nécessaire de montrer que $F+G \subset E$: cela découle immédiatement de la définition d'une somme de s.e.v.
- On n'écrit pas $f(g)$ mais $f \circ g$.