Devoir maison n° 15

À rendre le mardi 3 avril 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Endomorphismes tels que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On cherche dans cet exercice des conditions sur f pour que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

1) Montrer que, si f est un automorphisme de E, alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

2) Le but de cet question est de montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \end{cases}$$

   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

   b) Supposons que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$. Montrer que les inclusions réciproques sont alors vérifiées.

   c) Supposons que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

   d) Conclure.

3) On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme P de degré $n \geqslant 2$ qui annule f (c'est-à-dire tel que $P(f)$ est l'endomorphisme nul) vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

   On verra dans le chapitre Espaces vectoriels de dimension finie *que, si E admet une base*[1]*, alors tout endomorphisme de E possède un polynôme annulateur.*

   a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\lambda P(X) = X - X^2 Q(X)$.

   b) En déduire que $f = Q(f) \circ f^2 = f^2 \circ Q(f)$.

   c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

   d) Conclure que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

   e) Est-ce que l'existence d'un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$ est une condition nécessaire pour que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

1. Dans le programme d'ECS, une base est par définition constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Exercice 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y \big)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) a) Vérifier que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.

3) Donner une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

4) Posons $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.

   a) Exprimer f en fonction de p et q.

   b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

5) En remarquant que $p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{E}_1 \oplus E_2$.