Correction du DM n° 14

Exercice 1 : Successions de lancers de pièces amenant un même côté

Adapté de ECRICOME 2006

On lance indéfiniment une pièce de monnaie dont la probabilité de donner Pile est $p \in]0,1[$. On suppose les lancers indépendants. On s'intéresse dans cet exercice aux successions de lancers amenant un même côté. On dit que la première série est de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ième}}$ l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

On supposera que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons A_k l'événement « le $k^{\text{ième}}$ lancer est tombé sur Pile ».

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\boxed{[L_1 = n] = \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap \overline{A_{n+1}}\right) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cap A_{n+1}\right)}$$

b) Il s'agit de l'union de deux événements incompatibles, si bien que

$$\mathbb{P}(L_1 = n) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap \overline{A_{n+1}}\right) + \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cap A_{n+1}\right).$$

Puisque les lancers successifs sont indépendants, on obtient

$$\mathbb{P}(L_1 = n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right)\right) \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}}) + \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) \mathbb{P}(A_{n+1})$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n(1-p) + (1-p)^n p.}$

c) La probabilité que la première série est finie est, d'après la formule des probabilités totales,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n(1-p) + (1-p)^n p = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n(1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n p$$

car il s'agit de la somme de deux séries convergentes. Ainsi cette probabilité est égale à

$$(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n = (1-p)\frac{p}{1-p} + p\frac{1-p}{1-(1-p)} = p + 1 - p = 1.$$

Ainsi $\boxed{\text{la longueur de la première série est presque sûrement finie.}}$

d) Les séries de termes généraux $n^2(1-p)^n p$ et $n^2 p^n(1-p)$ convergent. En effet on reconnait des combinaisons linéaires de termes généraux de séries géométriques dérivées de raison $1-p \in]0,1[$ et $p \in]0,1[$ respectivement. Ainsi la série de terme général $n^2\mathbb{P}(L_1 = n)$ converge. Nous en déduisons que L_1 admet un moment d'ordre 2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} np^n(1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n p \\
&= p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} + p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p)\frac{1}{(1-p)^2} + p(1-p)\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} \\
&= \frac{p^2 + (1-p)^2}{p(1-p)}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(L_1) = \dfrac{p^2+(1-p)^2}{p(1-p)}.}$ Ensuite la formule de transfert entraîne que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(L_1 = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(L_1 = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(L_1 = n) \\
&= \mathbb{E}(L_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p^n(1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^n p \\
&= \mathbb{E}(L_1) + p^2(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} + p(1-p)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} \\
&= \mathbb{E}(L_1) + p^2(1-p)\frac{2}{(1-p)^3} + p(1-p)^2\frac{2}{(1-(1-p))^3} \\
&= \frac{p^2+(1-p)^2}{p(1-p)} + \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2}
\end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(L_1) = \mathbb{E}(L_1^2) - \mathbb{E}(L_1)^2 &= \frac{p^2+(1-p)^2}{p(1-p)} + \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} - \frac{(p^2+(1-p)^2)^2}{p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{p^3(1-p) + p(1-p)^3 + 2p^4 + 2(1-p)^4 - p^4 + 2p^2(1-p)^2 - (1-p)^4}{p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{p^3 - p^4 - (1-p)^4 + (1-p)^3 + 2p^4 + 2(1-p)^4 - p^4 + 2p^2(1-p)^2 - (1-p)^4}{p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{p^3 + (1-p)^3 + 2p^2(1-p)^2}{p^2(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}(L_1) = 2 + \dfrac{p^3+(1-p)^3}{p^2(1-p)^2}.}$

2) On note L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = &\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=n+1}^{n+k} \overline{A_j}\right) \cap A_{n+k+1}\right) \\
&\cup \left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}\right) \cap \left(\bigcap_{j=n+1}^{n+k} A_j\right) \cap \overline{A_{n+k+1}}\right)
\end{aligned}$$

Par incompatibilité et indépendance, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1}(1-p)^k + (1-p)^{n+1}p^k.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à L_1 entraîne que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}(1-p)^k + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n+1}p^k \\
&= (1-p)^k p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} + p^k(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \\
&= (1-p)^k p^2 \frac{1}{1-p} + p^k(1-p)^2 \frac{1}{1-(1-p)}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(L_2=k)=(1-p)^{k-1}p^2+p^{k-1}(1-p)^2.}$

c) La probabilité que la première série est finie est, d'après la formule des probabilités totales,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(L_2=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p^2+\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k-1}(1-p)^2=\frac{p^2}{1-(1-p)}+\frac{(1-p)^2}{1-p}=p+1-p=1.$$

Ainsi $\boxed{\text{la longueur de la deuxième série est presque sûrement finie.}}$

d) La variable aléatoire L_2 admet un moment d'ordre 2 pour les mêmes raisons que L_1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_2)=\sum_{k=1}^{+\infty}n\mathbb{P}(L_2=k)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p^2+\sum_{k=1}^{+\infty}kp^{k-1}(1-p)^2\\&=p^2\frac{1}{(1-(1-p))^2}+(1-p)^2\frac{1}{(1-p)^2}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(L_2)=2.}$ Ensuite la formule de transfert entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_2^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\mathbb{P}(L_2=k)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(L_2=k)+\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(L_2=k)\\&=\mathbb{E}(L_2)+\sum_{n=1}^{+\infty}k(k-1)(1-p)^{k-1}p^2+\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)p^{k-1}(1-p)^2\\&=2+p^2(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3}+p(1-p)^2\frac{2}{(1-p)^3}\\&=2+\frac{2(1-p)}{p}+\frac{2p}{1-p}=\frac{2}{p}+\frac{2p}{1-p}=2\frac{1-p+p^2}{p(1-p)}\end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(L_2)=\mathbb{E}(L_2^2)-\mathbb{E}(L_2)^2=2\frac{1-p+p^2}{p(1-p)}-4&=2\frac{1-p+p^2-2p+2p^2}{p(1-p)}\\&=\boxed{\frac{1-3p+3p^2}{p(1-p)}.}\end{aligned}$$

3) • Si L_1 et L_2 sont indépendantes alors, en particulier, $\mathbb{P}([L_1=1]\cap[L_2=1])=\mathbb{P}(L_1=1)\mathbb{P}(L_2=1)$. Or on a

$$\begin{aligned}p^2(1-p)+(1-p)^2p=2p(1-p)\left(p^2+(1-p)^2\right)\quad&\Longleftrightarrow\quad p+(1-p)=2(2p^2-2p+1)\\&\Longleftrightarrow\quad 4p^2-4p+1=0\\&\Longleftrightarrow\quad (2p-1)^2=0\\&\Longleftrightarrow\quad p=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

• Réciproquement, suppose que $p=\dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, pour tous $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}(L_1=n)=\frac{1}{2^n},\qquad\mathbb{P}(L_2=k)=\frac{1}{2^k},\qquad\mathbb{P}([L_1=n]\cap[L_2=k])=\frac{1}{2^{n+k}}.$$

Ainsi $\mathbb{P}([L_1=n]\cap[L_2=k])=\mathbb{P}(L_1=n)\mathbb{P}(L_2=k)$.

Nous en déduisons que $\boxed{L_1 \text{ et } L_2 \text{ sont indépendants si et seulement si } p=1/2.}$

4)

```
function [L1,L2]=SeriesLancers(p)
L1=1; x=(rand()<p);//x contient le résultat du premier lancer
while  (rand()<p)==x//tant que l'on obtient x, on continue
       L1=L1+1;
end
L2=1
while  (rand()<p)<>x//tant que l'on n'obtient pas x, on continue
       L2=L2+1;
end
endfunction
```

Exercice 2 : DS n° 007 – question coupée au montage

On reprend la partie A du problème du DS n° 007. Il s'agit de la question 6, coupée au montage.

6) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = 2n+1) = \mathbb{P}(E_n)$ et $\mathbb{P}(X = 2n+2) = \mathbb{P}(F_n)$.

b) Les séries de termes généraux $|2n+1|\mathbb{P}(X = 2n+1) = (2n+1)(1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$ et $|2n+2|\mathbb{P}(X = 2n+2) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2$ convergent. En effet on reconnait des combinaisons linéaires de termes généraux de séries géométriques dérivées de raison $(1-p_1)(1-p_2) \in]0,1[$. Nous en déduisons que X admet une espérance et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\mathbb{P}(X=2n+1) + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)\mathbb{P}(X=2n+2)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)(1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2\\
&= 2\big(p_1+(1-p_1)p_2\big)\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p_1)^n(1-p_2)^n + \big(p_1+2(1-p_1)p_2\big)\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p_1)^n(1-p_2)^n.
\end{aligned}$$

Séparément, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p_1)^n(1-p_2)^n = (1-p_1)(1-p_2)\sum_{n=1}^{+\infty} n\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{n-1} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{\big(1-(1-p_1)(1-p_2)\big)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p_1)^n(1-p_2)^n = \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{2\big(p_1+p_2-p_1p_2\big)(1-p_1)(1-p_2)}{\big(p_1+p_2-p_1p_2\big)^2} + \frac{p_1+2(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}\\
&= \frac{2(1-p_1)(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2} + \frac{p_1+2(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}\\
&= \frac{2-2p_1-2p_2+2p_1p_2+p_1+2p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = \frac{2-p_1+p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}.
\end{aligned}$$