Devoir maison n$^{\text{o}}$ 14

À rendre le mardi 27 mars 2018

Exercice 1 : Successions de lancers de pièces amenant un même côté

On lance indéfiniment une pièce de monnaie dont la probabilité de donner Pile est $p \in]0,1[$. On suppose les lancers indépendants. On s'intéresse dans cet exercice aux successions de lancers amenant un même côté. On dit que la première série est de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $n^{\text{ième}}$ l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

On supposera que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons A_k l'événement « le $k^{\text{ième}}$ lancer est tombé sur Pile ».

1) On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[L_1 = n]$ en fonction des événements A_k, $k \in \mathbb{N}^*$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n(1-p) + (1-p)^n p$.
   c) Montrer que la longueur de la première série est presque sûrement finie.
   d) Montrer que L_1 admet un moment d'ordre 2 et calculer son espérance et sa variance.
2) On note L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.
   a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([L_1 = n] \cap [L_2 = k])$.
   b) En déduire $\mathbb{P}(L_2 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   c) Montrer que la longueur de la deuxième série est presque sûrement finie.
   d) Montrer que L_2 admet un moment d'ordre 2 et calculer son espérance et sa variance.
3) Pour quelles valeurs de p les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
   C'est-à-dire $\mathbb{P}([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \mathbb{P}(L_1 = n)\mathbb{P}(L_2 = k)$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.
4) ***(facultatif)*** Écrire une fonction Scilab qui prend en entrée un réel $p \in]0,1[$, simule un certain nombre de lancers et qui renvoie les valeurs de L_1 et L_2 obtenues.

Exercice 2 : DS n$^{\text{o}}$ 007 – question coupée au montage

On reprend la partie A du problème du DS n$^{\text{o}}$ 007. Il s'agit de la question 6, coupée au montage.

6) Introduisons X la variable aléatoire comptant le nombre total de tirs avant qu'un joueur ne marque.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X = 2n+1)$ et $\mathbb{P}(X = 2n+2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que X admet une espérance et calculer-la.