Correction du DM n° 13

Partie A : Un lemme préliminaire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'événements.

Posons $C_{n_0} = A_{n_0}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $C_{n+1} = A_{n+1} \Big\backslash \bigcup_{k=n_0}^{n} A_k$.

1) Procédons par double inclusion.

- On remarque que, pour tout $n \geqslant n_0$, $C_n \subset A_n$. Ainsi $\boxed{\bigcup_{n \geqslant n_0} C_n \subset \bigcup_{n \geqslant n_0} A_n}$.
- Soit $\omega \in \bigcup_{n \geqslant n_0} A_n$, alors il existe $n \geqslant n_0$ (on prend n le plus petit possible) tel que $\omega \in A_n$. On a alors $\omega \notin \bigcup_{k=n_0}^{n-1} A_k$ et donc $\omega \in C_n$. Ainsi $\omega \in \bigcup_{n \geqslant n_0} C_n$. Nous en déduisons que $\boxed{\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n \subset \bigcup_{n \geqslant n_0} C_n}$.

Ensuite, donnons-nous des entiers i et j tels que $n_0 \leqslant i < j$. Si $\omega \in C_i$, alors $\omega \in A_i$ donc $\omega \in \bigcup_{k=n_0}^{j-1} A_k$ et donc $\omega \notin C_j$. Par conséquent $C_i \cap C_j = \varnothing$.
Cela signifie que $\boxed{\text{les événements de la suite } (C_n)_{n \geqslant n_0} \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$

2) La suite $(C_n)_{n \geqslant n_0}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} C_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, $C_n \subset A_n$ donc $\mathbb{P}(C_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n)$. Puisque la série $\sum_{n \geqslant n_0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).}$

Partie B : Le lemme de Borel-Cantelli

1) a) On a $\omega \in E$ si et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, $\omega \in \bigcup_{k \geqslant n} A_k$. Ainsi

$$\omega \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \geqslant 1, \quad \exists k \geqslant n, \quad \omega \in A_n,$$

c'est-à-dire ω appartient à une infinité des A_n, $n \geqslant 1$.

b) On a donc

$$\omega \in \overline{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \notin E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant n, \quad \omega \notin A_n,$$

c'est-à-dire ω n'appartient qu'à un nombre fini des événements A_n, $n \geqslant 1$. Ou encore, à partir d'un certain rang $n \geqslant 1$, ω appartient à $\overline{A}_k$, $k \geqslant n$.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_k)$ converge, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ (on reconnait en effet le reste d'une série convergente). Ainsi, par encadrement, $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 0.}$

b) Nous en déduisons que $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1$ c'est-à-dire, presque sûrement, seul un nombre fini des A_n, $n \geqslant 1$, se réalise.

3) a) C'est très classique. On pose $\varphi : x \longmapsto e^{-x} - 1 + x$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -e^{-x} + 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$. Ainsi φ est croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}^-$). En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$, i.e. $\boxed{e^{-x} \geqslant 1 - x}$.

b) Soient $n \geqslant 1$ et $N \geqslant n$. On a, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{N} \big(1 - \mathbb{P}(A_k)\big) \leqslant \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)}$$

où on a utilisé la question précédente. Finalement $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right).}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et qu'elle est à termes positifs, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$ (en effet la suite des sommes partielles est alors croissante non majorée). Par conséquent $\lim\limits_{N\to+\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right) = 0$ et donc, par encadrement, nous obtenons que $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = 0$. Enfin, par propriété de la limite monotone,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = 0.}$$

d) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right) = 1$. Puisque $\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements, la propriété de la limite monotone entraîne que

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 1.}$$

e) Nous en déduisons que, presque sûrement, une infinité des événements A_n, $n \geqslant 1$, se réalisent.

4) D'après la question 2, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\overline{A}_n)$ converge alors, presque sûrement, seul un nombre fini des $\overline{A_n}$, $n \geqslant 1$, se réalise. Cela signifie que, presque sûrement, une infinité des A_n, $n \geqslant 1$, se réalisent à la suite.

Partie C : Applications

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$ où A_n est l'événement « le $n^{\text{ième}}$ lancer tombe sur Pile ».

   a) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'événements indépendants. D'après BC2, la probabilité de tomber une infinité de fois sur Pile est égale à 1.

   b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\overline{A}_n)$ diverge et $(\overline{A}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'événements indépendants. D'après BC2, la probabilité de tomber une infinité de fois sur Face est égale à 1. En passant au complémentaire, on obtient que la probabilité de tomber une infinité de fois à la suite sur Pile est nulle.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{n}$ où A_n est l'événement « la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge ».

   a) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'événements indépendants. D'après BC2, la probabilité de tirer une infinité de fois la boule rouge est égale à 1.

   b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\overline{A}_n)$ diverge et $(\overline{A}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'événements indépendants. D'après BC2, la probabilité tirer une infinité de fois la boule bleue est égale à 1. En passant au complémentaire, on obtient que la probabilité de tirer une infinité de fois à la suite la boule rouge est nulle.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{n^2}$ où A_n est l'événement « la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge ». La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après BC1, la probabilité de tirer une infinité de fois la boule rouge est égale à 0.

Quelques remarques générales :

- Pour pouvoir appliquer la formule $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}$, on n'oublie surtout pas de vérifier que les événements A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles.
- La propriété « $\bigcup\limits_{n\geqslant n_0} A_n = \bigcup\limits_{n\geqslant n_0} C_n$ » ne dépend pas de n qui est ici une variable muette. Pas question donc de raisonner par récurrence sur n pour la montrer. Une façon de faire est de montrer par récurrence la propriété P_n : « $\bigcup\limits_{k=n_0}^{n} A_k = \bigcup\limits_{n=n_0}^{k} C_n$ », qui cette fois dépend bien de n, puis de prendre l'union :
$$\bigcup_{n\geqslant n_0} A_n = \bigcup_{n\geqslant n_0} \bigcup_{k=n_0}^{n} A_k = \bigcup_{n\geqslant n_0} \bigcup_{k=n_0}^{n} C_k = \bigcup_{n\geqslant n_0} C_n$$
(ce qui revient à faire tendre n vers $+\infty$).
- Attention on n'écrit jamais de produits infinis (notamment quand on a l'intersection d'un nombre dénombrable d'événements indépendants où on utilise la propriété de limite monotone). La théorie des produits infinis n'est pas au programme et elle présente plusieurs subtilités que vous ne maitrisez pas.
- Pour montrer qu'une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'événements deux à deux disjoints, il est incomplet de se contenter de montrer que $C_n \cap C_{n+1} = \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La définition est claire : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \varnothing$.
- Dans un sujet, en général, les questions servent à répondre à plusieurs des questions suivantes. Pensez-y à chaque instant du sujet.