Devoir maison n° 13

À rendre le mardi 13 mars 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Problème : Lemme de Borel-Cantelli et applications

Partie A : Un lemme préliminaire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'événements.

Posons $C_{n_0} = A_{n_0}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $C_{n+1} = A_{n+1} \Big\backslash \bigcup_{k=n_0}^{n} A_k$.

1) Montrer soigneusement que $\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n = \bigcup_{n \geqslant n_0} C_n$ et que la suite $(C_n)_{n \geqslant n_0}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles.

2) En déduire que, si la série $\sum_{n \geqslant n_0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Partie B : Le lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'événements. Notons $E = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$.

1) a) Justifier que E est l'événement « Une infinité des événements A_n, $n \geqslant 1$, se réalisent » .

   b) Justifier que $\overline{E}$ est l'événement « Seul un nombre fini des événements A_n, $n \geqslant 1$, se réalise » ou encore « Une infinité des événements $\overline{A}_n$, $n \geqslant 1$, se réalisent à la suite ».

2) On suppose que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

   a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) = 0$ puis que $\mathbb{P}(E) = 0$.

   b) Que peut-on en conclure, presque sûrement, sur les événements A_n, $n \geqslant 1$.

3) On suppose que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'événements indépendants.

   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant e^{-x}$.

   b) Montrer que, pour tous $n \geqslant 1$ et $N \geqslant n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = 0$.

   d) En déduire que $\mathbb{P}(E) = 1$.

   e) Que peut-on en conclure, presque sûrement, sur les événements A_n, $n \geqslant 1$.

4) Que peut-on dire sur une suite d'événements $(A_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $\sum_{n \geqslant 1} \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big)$ converge.

Nous venons de montrer le célèbre *lemme de Borel-Cantelli* :

Théorème.

1. Si $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 0$.

2. Si les événements A_n, $n \geqslant 1$, sont indépendants et si $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 1$.

Partie C : Applications

Pour chacune des applications suivantes,

- on supposera qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience (et on ne cherchera pas à l'expliciter). Par contre on introduira soigneusement les événements considérés.
- on précisera, à chaque fois qu'on l'applique le lemme de Borel-Cantelli, si on utilise le premier point ou le deuxième point. On dira respectivement « *D'après BC1* » et « *D'après BC2* ».

1) On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée.
   a) Quelle est la probabilité de tomber une infinité de fois sur Pile ?

   b) Quelle est la probabilité de tomber une infinité de fois à la suite sur Pile ?

2) On dispose d'une urne contenant une seule boule de couleur rouge. On répète indéfiniment le jeu suivant : on tire uniformément une boule dans l'urne, on note sa couleur et on ajoute une nouvelle boule de couleur bleue. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, au moment du $k^{\text{ième}}$ tirage, l'urne contient donc 1 boule rouge et $k-1$ boules bleues. On suppose que les tirages sont indépendants.
   a) Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule rouge ?

   b) Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois à la suite la boule rouge ?

3) On recommence le jeu de la question précédente en modifiant un peu les règles : désormais on remplit l'urne de sorte que, au moment du $k^{\text{ième}}$ tirage, il y ait k^2-1 boules bleues dans l'urne et toujours une seule boule rouge. Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule rouge ?