# Correction du DM n$^{\text{o}}$ 12

## Exercice 1 : Formule de Stirling

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{\sqrt{n}n^n}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a) C'est ultra classique...

- Posons $\varphi : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$. Ainsi $\varphi$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$, i.e. $\boxed{\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}}$.
- Posons $\psi : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = -\dfrac{x^3}{1+x} \leqslant 0$. Ainsi $\psi$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$, i.e. $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n} &= \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{n+1} \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de la question 1 à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$$

donc

$$-1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right)$$

donc

$$-1 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant -1 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{6n^3}$$

et donc

$$-\frac{1}{4} \leqslant n^2(v_{n+1} - v_n) \leqslant \frac{1}{12} + \frac{1}{6n} \leqslant \frac{1}{12} + \frac{1}{6}.$$

Ainsi $\boxed{\left(n^2(v_{n+1} - v_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$.

d) Nous en déduisons que $|v_{n+1}-v_n| \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (v_{n+1}-v_n) \text{ converge absolument et donc converge}}$.

e) Il s'agit d'une série télescopique donc nous en déduisons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel $\ell$. Ainsi $u_n = e^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$. En posant $C = e^{\ell}$, nous obtenons donc que $u_n \underset{+\infty}{\sim} C$ et donc $\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$.

2) On a, d'après la formule de Wallis,

$$\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n\left(C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n C^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} C\frac{4^n n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{n\sqrt{2}\,2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi $\boxed{C=\sqrt{2\pi}}$.

3) a) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma\in\mathbb{R}$. On a, d'après la formule de Stirling,

$$\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+\gamma}e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n a^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\gamma-1/2}\left(\frac{e}{a}\right)^n.$$

- Si $a<e$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\gamma-1/2}\left(\dfrac{e}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (par croissances comparées si $\gamma<1/2$) et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ diverge grossièrement.
- Si $a>e$, alors $n^2\dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} \underset{+\infty}{\sim} n^2\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\gamma-1/2}\left(\dfrac{e}{a}\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\gamma+3/2}\left(\dfrac{e}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées si $\gamma>-1/2$). Comme il s'agit de séries à termes positifs et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ converge.
- Si $a=e$, alors $\dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}n^{1/2-\gamma}}$. Il s'agit de séries à termes positifs et $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^{1/2-\gamma}}$ converge si et seulement si $1/2-\gamma>1$ (c'est-à-dire $\gamma<-1/2$). On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ converge si et seulement si $\gamma<0$.

Nous en déduisons que $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} \text{ converge si et seulement si } a<e \text{ ou } (a=e \text{ et } \gamma<-1/2)}$.

b) 
- On a, d'après la question 2, $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.
- Puisque $n! \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, l'exercice 12 du TD n° 19 entraîne que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right)$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{\ln(n)}{2}+n\ln(n)-n.$$

Le terme prédominant dans la somme ci-dessous est $n\ln(n)$. Montrons que cette somme est bien équivalent à $n\ln(n)$ :

$$\frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)}{n\ln(n)} = \frac{\ln(2\pi)}{2n\ln(n)}+\frac{1}{2n}+n-\frac{1}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par transitivité, nous en déduisons que $\boxed{\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)}$.

- On aimerait bien écrire que $\sqrt[n]{n!} = (n!)^{1/n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[2n]{2\pi n}\,\dfrac{n}{e}$... mais on ne peut pas faire ça a priori (on peut élever des équivalents à la puissance... mais ici elle dépend de $n$ donc peut-on vraiment ?).

  Par contre remarquons que $\sqrt[2n]{2\pi n} = e^{\ln(2\pi n)/n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc on peut penser que $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$. Montrons rigoureusement que c'est le cas : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n/e} = \sqrt[n]{\frac{n!e^n}{n^n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)\right).$$

  On a, d'après la formule de Stirling, $\dfrac{n!e^n}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}$. Puisque $\sqrt{2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'exercice 12 du TD n° 19 entraîne que $\ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\sqrt{2\pi n})$ et donc $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\sqrt{2\pi n})}{n}$.

  Par croissances comparées, nous obtenons donc que $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^n}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, par continuité de $\exp$ en $0$,

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n/e} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

  Ainsi $\boxed{\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}}$.

## Exercice 2 : Un jeu de pile ou face

1) On peut modéliser cette expérience par l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = \{0,1\}^{2n}$ et $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité. Si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ alors, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\omega_k = 1$ (resp. $0$) si le $k^{\text{ième}}$ lancer tombe sur Pile (resp. Face).
2) Notons $S_n$ la variable aléatoire correspondant au gain (absolu) total.
   a) Si on obtient $T_{2n}$ fois Pile, alors on a obtenu $2n - T_{2n}$ fois face. On a donc gagné $T_{2n}$ euros mais perdu $2n - T_{2n}$ euros. D'où $S_{2n} = 1 \times T_{2n} + (-1) \times (2n - T_{2n})$, i.e. $\boxed{S_{2n} = 2T_{2n} - 2n}$.
   b) $T_{2n}$ compte le nombre de succès (obtenir Pile) lors de la répétition de $2n$ épreuves de Bernoulli (lancer une pièce) indépendantes et identiques. Nous en déduisons que $\boxed{T_{2n} \text{ suit une loi } \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)}$.

      On remarque que $S_{2n}(\Omega)$ est l'ensemble des entiers pairs de $[\![-2n, 2n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(2T_{2n} - 2n = 2k) = \mathbb{P}(T_{2n} = n+k) = \binom{2n}{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(n+k)},$$

      d'où $\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n+k}}$.
   c) On a $\mathbb{E}(T_{2n}) = 2n\dfrac{1}{2} = n$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_{2n}) = \mathbb{E}(2T_{2n} - 2n) = 2\mathbb{E}(T_{2n}) - 2n = \boxed{0}$.

      On a $\mathbb{V}(T_{2n}) = 2n\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$. Ainsi $\mathbb{V}(S_{2n}) = \mathbb{V}(2T_{2n} - 2n) = 4\mathbb{V}(T_{2n}) = \boxed{2n}$.
3) On a $\mathbb{P}(S_n = 0) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4^n}\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}}$ d'après l'exercice 1.

### Partie A : Convergence de séries

1) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\zeta(2)$ puisque $\zeta(2)$ est la somme de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ (par définition). Nous en déduisons que la suit extraite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\zeta(2)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant la somme des termes de rangs pairs et impairs, on obtient :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Ainsi $\boxed{S_{2n} = \frac{1}{4}S_n + U_n}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = S_{2n} - \frac{1}{4}S_n$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\zeta(2)$, nous obtenons que $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } U = \frac{3}{4}\zeta(2)} = \zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(2)$.

### Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les polynômes de Tchebychev

1) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n\dfrac{\sin(n\theta)}{n\theta}\dfrac{\theta}{\sin(\theta)}$. Comme $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(n\theta)}{n\theta} = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n$.

b) Par ailleurs la fonction $\theta \longmapsto T_n(\cos(\theta)) - \cos(n\theta)$ est nulle sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n\sin(n\theta) = 0.$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $T_n'(\cos(\theta)) = n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$. Mais $T_n \circ \cos$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $T_n'(1) = \displaystyle\lim_{\theta\to 0} T_n'(\cos(\theta))$ et donc $\boxed{T_n'(1) = n^2}$.

2) a) Si $n = 1$, alors $T_n = X$ donc $T_n' = 1$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x - x_0}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $\ell \in [\![0, n-2]\!]$, $\ln(|T_n|)$ est une primitive de $\dfrac{T_n'}{T_n}$ sur $]x_\ell, x_{\ell+1}[$.

De plus, pour tout $x \in ]x_\ell, x_{\ell+1}[$,

$$\ln(|T_n(x)|) = \ln\left(2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)\right) = (n-1)\ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(|x - x_k|\right).$$

Ainsi

$$\big(\ln(|T_n|)\big)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x - x_k}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \qquad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x - x_k}.}$$

b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2 = \frac{T_n'(1)}{T_n(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} = \sin^2(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = \boxed{2n^2}.$$

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a $\dfrac{1}{\sin^2(\theta)} - 1 = \dfrac{1-\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \dfrac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \dfrac{1}{\tan^2(\theta)}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} - n = \boxed{2n^2 - n}.$$

3) C'est ultra classique... Notons $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Posons $\varphi : x \in I \longmapsto \sin(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $I$ et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = \cos(x) - 1 < 0$. Ainsi $\varphi$ est strictement décroissante sur $I$ et donc, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \leqslant \varphi(0) = 0$, i.e. $\boxed{\sin(x) \leqslant x}$.

b) Posons $\psi : x \in I \longmapsto \tan(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $I$ et, pour tout $x \in I$, $\psi'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Ainsi $\psi$ est strictement croissante sur $I$ et donc, pour tout $x \in I$, $\psi(x) \geqslant \psi(0) = 0$, i.e. $\boxed{\tan(x) \geqslant x}$.

4) Nous en déduisons que, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(x)}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \leqslant \frac{1}{\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}$$

et donc, en sommant, on obtient $2n^2 - n \leqslant \dfrac{16n^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqslant 2n^2$ et donc $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{\pi^2}{16n} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$.

Par encadrement, nous obtenons que $\boxed{U = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{\pi^2}{8}}$.

5) Puisque $\zeta(2) = \dfrac{4}{3}$, nous en déduisons que $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}}$.