Devoir maison n° 12

À rendre le mardi 6 mars 2018

Exercice 1 : Formule de Stirling

L'objectif de cet exercice est de montrer la célèbre formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{\sqrt{n}n^n}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$.
   c) Montrer que la suite $\big(n^2(v_{n+1} - v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(v_{n+1} - v_n)$ converge.
   e) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
2) *On rappelle la formule de Wallis (montré dans le DM n° 9) :* $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$.

   Montrer que $C = \sqrt{2\pi}$.
3) Applications.
   a) Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
   b) Donner un équivalent simple des suites de termes généraux :

$$u_n = \binom{2n}{n}, \qquad v_n = \ln(n!), \qquad w_n = \sqrt[n]{n!}.$$

   ⚠ *Pour les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$, il va falloir ruser un peu car, rappelez-vous, on ne peut pas composer les équivalents par une fonction a priori. On pourra le faire pour essayer de deviner des équivalents simples puis on pourra s'aidera de l'exercice 12 du TD n° 19 pour les montrer rigoureusement.*

Exercice 2 : Un jeu de pile ou face

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie équilibrée de façon indépendante. A chaque lancer, si la pièce tombe sur Pile, on gagne un euro, sinon on perd un euro.

1) Déterminer un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience.
2) Notons S_{2n} la variable aléatoire correspondant au gain total (pouvant être négatif !).
   a) Notons T_{2n} le nombre de Pile obtenus. Justifier que $S_{2n} = 2T_{2n} - 2n$.
   b) En déduire la loi de S_{2n}.
   c) Donner $\mathbb{E}(S_{2n})$ et $\mathbb{V}(S_{2n})$ (sans faire de calculs de sommes).
3) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie A : Convergence de séries

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

On rappelle que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que l'on note $\zeta(2)$ sa somme.

1) Justifier la suite que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\zeta(2)$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_{2n} en fonction de S_n et U_n.
3) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite U que l'on exprimera en fonction de $\zeta(2)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les polynômes de Tchebychev

Nous avons étudié les polynômes de Tchebychev dans le DM nº 10. On rappelle qu'il s'agit de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- *T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.*
- *T_n admet n racines réelles distinctes $x_1, \dots, x_n$ avec*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

1) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Calculer $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   b) En revenant à la définition de T_n, en déduire que $T_n'(1) = n^2$.
2) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) En utilisant une primitive, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \qquad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}.$$

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = n^2.$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les valeurs des sommes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}.$$

   On pourra montrer au préalable que $\frac{1}{\tan^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1$ pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
4) En déduire la valeur de U.
5) Retrouver que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.