Correction du DM n° 11

Exercice 1 : Étude d'un sous-espace vectoriel de matrices

1) Commençons par remarquer que $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) = (0,0,0)$ si bien que $O_3 \in \mathcal{A}$.

Ensuite donnons-nous $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{A}$, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \lambda M + \mu M' &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\lambda c + \mu c') & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & 0 & -(\lambda a + \mu a') \\ -(\lambda b + \mu b') & \lambda a + \mu a' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{A} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2) Notons $A = E_{3,2} - E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = E_{1,3} - E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$C = E_{2,1} - E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^*$, alors $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = a\,A + b\,B + c\,C$.

Nous en déduisons que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(A,B,C)$. Montrons que la famille $\mathcal{B} = (A,B,C)$ est libre : donnons-nous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\,A + b\,B + c\,C = O_n$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = b = c = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Puisqu'elle engendre $\mathcal{A}$, nous en déduisons que $\boxed{(A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{A}}$.

3) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

- Si $b = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
  - Si $c = 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, on obtient une matrice dont la diagonale est nulle. La matrice M n'est donc pas inversible dans ce cas.
  - Si $c \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 2, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. En faisant l'opération $L_3 \leftarrow cL_3 + aL_2$, on obtient $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'étant pas inversible (sa diagonale contient un 0), on en déduit que la matrice M non plus.

- Si $b \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, puis en faisant l'opération $L_2 \leftarrow bL_2 + cL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$.
  — Si $a = 0$, alors en échangeant les lignes 2 et 3 on obtient une matrice triangulaire dont la diagonale contient 0. On en déduit que M n'est pas inversible.
  — Si $a \neq 0$ alors, on faisant l'opération $L_3 \leftarrow aL_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M n'est pas inversible.

Finalement aucune matrice de $\mathcal{A}$ n'est inversible. On a bien $\boxed{\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing}$.

4) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

a) On calcule que $\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} -(b^2+c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2+c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2+b^2) \end{pmatrix}}$ et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & c(a^2+b^2+c^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ -c(a^2+b^2+c^2) & 0 & a(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & -a(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

donc $\boxed{M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M \in \mathcal{A}}$.

b) Puisque $M = a\,A + b\,B + c\,C$ et que $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, on en déduit que le triplet de cordonnées de M^3 dans $\mathcal{B}$ est $\boxed{(-a(a^2+b^2+c^2), -b(a^2+b^2+c^2), -c(a^2+b^2+c^2))}$.

c) On obtient également que $M^3 + (a^2+b^2+c^2)M = \mathrm{O}_3$. Par conséquent $\boxed{\text{le polynôme } X^3 + (a^2+b^2+c^2)X \text{ annule } M}$.

d) On a $\boxed{M^0 = \mathrm{I}_3,\ M^1 = M}$, $M^2 = M^2$, $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, puis

$$M^4 = M^3\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^2,$$

$$M^5 = M^4\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^3 = (a^2+b^2+c^2)^2M,$$

$$M^6 = M^5\,M = (a^2+b^2+c^2)^2M^2,$$

$$M^7 = M^6\,M = (a^2+b^2+c^2)^2M^3 = -(a^2+b^2+c^2)^3M.$$

Par récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{M^{2k} = (-1)^{k-1}(a^2+b^2+c^2)^{k-1}M^2 \qquad \text{et} \qquad M^{2k+1} = (-1)^k(a^2+b^2+c^2)^kM.}$$

1) $\boxed{\text{On a } R_1(\Omega) = \{2\},\ R_2(\Omega) = \{1,2,3\} \text{ et } R_n(\Omega) = \{0,1,2,3\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$.

- Sachant $R_n = 0$, c'est-à-dire l'urne U (resp. V) ne contient que des boules bleues (resp. rouges) à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage, on va forcément tirer une boule bleue dans U et une boule rouge dans V. Comme on les échange, nous allons nous retrouver avec une boule rouge et deux boules bleues dans U. Nous en déduisons que $\mathbb{P}_{[R_n=0]}(R_{n+1} = 1) = 1$.
- Sachant $R_n = 1$, c'est-à-dire l'urne U (resp. V) contient une seule boule rouge (resp. bleue) à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage,
  - ou bien on tire une rouge dans U et une rouge dans V (avec probabilité $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$, par indépendance des tirages) et $R_{n+1} = 1$.
  - ou bien on tire une bleue dans U et une bleue dans V (avec probabilité $\frac{2}{3}\frac{1}{3}$) et $R_{n+1} = 1$.
  - ou bien on tire une rouge dans U et une bleue dans V (avec probabilité $\frac{1}{3}\frac{1}{3}$) et $R_{n+1} = 0$.
  - ou bien on tire une bleue dans U et une rouge dans V (avec probabilité $\frac{2}{3}\frac{2}{3}$) et $R_{n+1} = 2$.

  On en déduit que $\mathbb{P}_{[R_n=1]}(R_{n+1} = 3) = 0$ et, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}_{[R_n=1]}(R_{n+1} = 1) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}, \qquad \mathbb{P}_{[R_n=1]}(R_{n+1} = 0) = \frac{1}{9}, \qquad \mathbb{P}_{[R_n=1]}(R_{n+1} = 2) = \frac{4}{9}.$$

- On montre de même que $\mathbb{P}_{[R_n=2]}(R_{n+1} = 0) = 0$,

$$\mathbb{P}_{[R_n=2]}(R_{n+1} = 1) = \frac{4}{9}, \qquad \mathbb{P}_{[R_n=2]}(R_{n+1} = 2) = \frac{4}{9}, \qquad \mathbb{P}_{[R_n=2]}(R_{n+1} = 3) = \frac{1}{9}.$$

- On a aussi $\mathbb{P}_{[R_n=3]}(R_{n+1} = 2) = 1$.

On en déduit que $\boxed{M_n = M}$.

3) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $([R_n = k])_{0\leqslant k\leqslant 3}$ de probabilités non nulles entraîne que

$$(X_{n+1})_1 = \mathbb{P}(R_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{[R_n=k]}(R_{n+1} = 0)\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(R_n = 1) = \frac{1}{9}(X_n)_2,$$

$$(X_{n+1})_2 = \mathbb{P}(R_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{[R_n=k]}(R_{n+1} = 1)\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{9}(X_n)_1 + \frac{4}{9}(X_n)_2 + \frac{4}{9}(X_n)_3,$$

$$(X_{n+1})_3 = \mathbb{P}(R_{n+1} = 2) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{[R_n=k]}(R_{n+1} = 2)\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{4}{9}(X_n)_2 + \frac{4}{9}(X_n)_3 + \frac{1}{9}(X_n)_4,$$

$$(X_{n+1})_4 = \mathbb{P}(R_{n+1} = 3) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{[R_n=k]}(R_{n+1} = 3)\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(R_n = 2) = \frac{1}{9}(X_n)_3.$$

Nous en déduisons que $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

4) a) Appliquons la méthode de Gauss-Jordan à la matrice P. On a

$$(P|\mathrm{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 30 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 30 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -20 & 20 & -20 & 0 & 19 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -30 & 0 & 12 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 20L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -60 & 60 & 0 & 0 & 42 & -8 & 2 & 12 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 9 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -60 & 0 & 0 & 0 & 15 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 9 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -15 & 5 & -5 & 15 \\ 27 & -3 & -3 & 27 \\ -15 & -5 & 5 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) On vérifie que

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 9 \\ -9 & 1 & -9 & 81 \\ 9 & 1 & 9 & 81 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

et

$$9MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 9 \\ -9 & 1 & -9 & 81 \\ 9 & 1 & 9 & 81 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

et donc on a bien $\boxed{PD = 9MP}$.

5) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$. Par récurrence immédiate, on obtient donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. De plus $M = \dfrac{1}{9}PDP^{-1}$. Par récurrence immédiate, on obtient $M^n = \dfrac{1}{9^n}PD^nP^{-1}$ et donc $\boxed{X_n = \dfrac{1}{9^n}PD^nP^{-1}X_0}$.

6) a) On a

$$\frac{1}{9^n}D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{9}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{4,4}.$$

Nous en déduisons que $\boxed{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet } X_\infty = PE_{4,4}P^{-1}X_0 \text{ pour limite}}$.

b) On a

$$P^{-1}X_0 = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -15 & 5 & -5 & 15 \\ 27 & -3 & -3 & 27 \\ -15 & -5 & 5 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$E_{4,4}P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X_\infty = PE_{4,4}P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = X_\infty}.$$

7) Notons A_1 (resp. A_2, A_3) l'événement « tirer une boule rouge au premier (resp. deuxième, troisième) tirage ». La formule des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}(R=0) = \mathbb{P}(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(\overline{A_3}) = \frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

$$\mathbb{P}(R=3) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) = \frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R=1) &= \mathbb{P}(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) + \mathbb{P}(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}) + \mathbb{P}(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3) \\ &= \frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{9}{20}\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(R=2) = 1 - \mathbb{P}(R=0) - \mathbb{P}(R=1) - \mathbb{P}(R=3) = 1 - \frac{1}{20} - \frac{9}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$. On a bien

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbb{P}(R=0) \\ \mathbb{P}(R=1) \\ \mathbb{P}(R=2) \\ \mathbb{P}(R=3) \end{pmatrix} = X_\infty.}$$

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^*$. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$. Il existe alors $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $P=aX^3+bX^2+cX+d$. On a

$$\begin{aligned}\int_2^4 P(t)\,dt = \left[a\frac{t^4}{4}+b\frac{t^3}{3}+c\frac{t^2}{2}+dt\right]_2^4 &= a\frac{4^4}{4}+b\frac{4^3}{3}+c\frac{4^2}{2}+d4-\frac{2^4}{4}-b\frac{2^3}{3}-c\frac{2^2}{2}-d2\\ &= 60a+\frac{56}{3}b+6c+2d\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}xP(2)+yP(3)+zP(4) &= x(a2^3+b2^2+c2+d)+y(a3^3+b3^2+c3+d)+z(a4^3+b4^2+c4+d)\\ &= x(8a+4b+2c+d)+y(27a+9b+3c+d)+z(64a+16b+4c+d)\\ &= a(8x+27y+64z)+b(4x+9y+16z)+c(2x+3y+4z)+d(x+y+z).\end{aligned}$$

Ainsi P vérifie $\displaystyle\int_2^4 P(t)\,dt = xP(2)+yP(3)+zP(4)$ si et seulement si

$$a(8x+27y+64z-60)+b\left(4x+9y+16z-\frac{56}{3}\right)+c(2x+3y+4z-6)+d(x+y+z-2)=0.$$

Cette condition est vérifiée pour tout polynôme P si et seulement si elle et vérifiée pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

- Si (x,y,z) vérifie (S) : $\begin{cases} x+y+z=2\\ 2x+3y+4z=6\\ 12x+27y+48z=56\\ 8x+27y+64z=60\end{cases}$

  alors la condition est vérifiée pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.
- Réciproquement, si cette condition est vérifie pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, alors elle est vérifiée pour $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ et donc (x,y,z) vérifie le système (S).

Ainsi $\boxed{(x,y,z) \text{ est solution au problème si et seulement si } (x,y,z) \text{ est solution de } (S)}$.

2) On a

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} x+y+z=2\\ y+2z=2 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ 15y+36z=32 & L_3\leftarrow L_3-12L_1\\ 19y+56z=44 & L_4\leftarrow L_4-8L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y+z=2\\ y+2z=2\\ 6z=2 & L_3\leftarrow L_3-15L_2\\ 18z=6 & L_4\leftarrow L_4-19L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y+z=2\\ y+2z=2\\ 6z=2\\ 0=0 & L_4\leftarrow L_4-3L_3\end{cases}\end{aligned}$$

Par remontées successives, on montre que $z=\dfrac{1}{3}$ puis $y=2-2z=\dfrac{4}{3}$ et $x=2-y-z=\dfrac{1}{3}$.

Le problème possède une unique solution : $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right).}$