Devoir maison n$^{\text{o}}$ 11

À rendre le mardi 6 février 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Étude d'un sous-espace vectoriel de matrices

Introduisons $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ (*la plus simple possible*) de $\mathcal{A}$.
3) A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing$.
4) Soit $M \in \mathcal{A}$.
   a) Calculer M^2 et M^3. Remarquer que $M^3 \in \mathcal{A}$.
   b) Exprimer les coordonnées de M^3 dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de M.
   c) En déduire un polynôme annulateur de M.
   d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer M^k en fonction de k, M, M^2 et des coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 : Les matrices au secours des probabilités (le retour)

Commençons par définir quelques matrices :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On considère deux urnes U et V contenant chacune trois boules. Au départ, l'urne U contient trois boules rouges et l'urne V contient trois boules bleues. On effectue une succession de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer une boule uniformément dans chaque urne, indépendamment l'une de l'autre, et à les échanger. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges dans l'urne U à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage. On a $R_0 = 3$.

On se limite à un nombre fini de tirages afin de pouvoir modéliser cette expérience par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *que l'on ne cherchera pas à expliciter.*

1) Donner $R_1(\Omega)$, $R_2(\Omega)$ et $R_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$. Notons $M_n \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de M est $\mathbb{P}_{[R_n=j-1]}(R_{n+1} = i-1)$. Montrer que $M_n = M$. On remarquera qu'elle ne dépend pas de n.
   On rédigera soigneusement la preuve de l'égalité $M_n = M$ pour la deuxième colonne. On pourra se contenter d'une brève justification pour les trois autres.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(R_n = 0) \\ \mathbb{P}(R_n = 1) \\ \mathbb{P}(R_n = 2) \\ \mathbb{P}(R_n = 3) \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$, $X_{n+1} = MX_n$.
   On admet (c'est facile à vérifier) que cette formule reste vraie pour $n = 0$, 1 ou 2.

4) a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

   b) Vérifier que $PD = 9MP$.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \dfrac{1}{9^n} PD^n P^{-1} X_0$.

6) *Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$, notons $a_{i,j}^{(n)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A_n. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad a_{i,j}^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_{i,j}.$$

   Soit $(p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$) qui converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ (resp. $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$). On admet que la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

   a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $X_\infty = PE_{4,4}P^{-1}X_0$ pour limite.
   On rappelle que $E_{4,4}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(4,4)$ qui vaut 1.

   b) Expliciter X_∞.

7) On considère une autre expérience aléatoire : on dispose d'une urne contenant trois boules rouges et trois boules bleues. On tire successivement et sans remise trois boules dans l'urne et on note R la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges tirées. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(R=0) \\ \mathbb{P}(R=1) \\ \mathbb{P}(R=2) \\ \mathbb{P}(R=3) \end{pmatrix} = X_\infty.$$

   Autrement dit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X. On dit que la suite de variable aléatoire $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire R.

En fait on a un peu triché (et ce n'est pas la première fois...) puisqu'on avait considéré Ω fini et qu'on a fait tendre le nombre de tirages vers $+\infty$. Heureusement nous verrons prochainement en cours les espaces probabilisés quelconque : on peut tout à fait construire un espace probabilisé décrivant cette expérience et tout ce qu'on a fait dans cet exercice reste valide dans ce cadre.

Exercice 3 : Un peu de polynômes, d'intégrales et de systèmes (facultatif)

L'objectif de cet exercice et de trouver trois réels x, y et z tels que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$,

$$\int_2^4 P(t)\,dt = xP(2) + yP(3) + zP(4).$$

1) Montrer que $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution au problème si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \\ 12x & + & 27y & + & 48z & = & 56 \\ 8x & + & 27y & + & 64z & = & 60 \end{array}\right.$$

2) Résoudre ce système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss et conclure.