Correction du DM n$^{\text{o}}$ 10

Exercice 1 : Polynômes de Tchebychev

Partie A : Existence et unicité des polynômes de Tchebychev

1) *Existence.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}(e^{in\theta}) = \mathfrak{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)\right),$$

d'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton. Nous en déduisons que

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta)\,(-1)^p \sin^{2p}(\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta)\,(-1)^p (1-\cos^2(\theta))^p.$$

$\boxed{\text{Le polynôme } \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p X^{n-2p}(1-X^2)^p \text{, de degré } n \text{, convient.}}$

Unicité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P et Q sont deux polynômes qui vérifient, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Nous en déduisons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(P-Q)(\cos(\theta)) = 0$. Ainsi $P - Q$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$) et donc il s'agit du polynôme nul. Ainsi $P = Q$. $\boxed{\text{D'où l'unicité.}}$

2)
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 = \cos(0 \times \theta)$ donc, par unicité, $\boxed{T_0 = 1}$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$ donc, par unicité, $\boxed{T_1 = X}$.
- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\big(T_{n+2} + T_n\big)(\cos(\theta)) &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) \\ &= 2\cos\left(\frac{(n+2)\theta + n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\theta - n\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\big(T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n\big)(\cos(\theta)) = 0$. Ainsi $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$) et donc il s'agit du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.}$

3) On a :
- $T_2 = 2XT_1 - T_0$ donc $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$,
- $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X$ donc $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$,
- $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$ donc $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$,
- $T_5 = 2XT_4 - T_3 = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X)$ donc $\boxed{T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X}$.

Partie B : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\deg(T_n) = n}$ et le coefficient dominant de T_n est $\boxed{\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}}$.

- *Initialisation* : On a $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $\mathrm{dom}(T_1) = 1 = 2^{1-1}$. On a $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 1$ et $\mathrm{dom}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi la propriétés est vrai aux rangs 1 et 2.
- *Hérédité* : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$, c'est-à-dire $\deg(T_n) = n$, $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $\mathrm{dom}(T_n) = 2^n$. On a alors $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n+2 > \deg(T_n)$ donc

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n+2$$

et

$$\mathrm{dom}(T_{n+2}) = \mathrm{dom}(2XT_{n+1}) = 2 \times 1 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat par récurrence.

2) - *Méthode 1 :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} T_n(-X) &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \, (-X)^{n-2p} \, (1-(-X)^2)^p \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \, (-1)^n \, X^{n-2p} \, (1-X^2)^p = (-1)^n T_n(X). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{T_n \text{ est pair (resp. impair) si } n \text{ est pair (resp. impair)}}$.

- *Méthode 2 :* Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(-\cos(\theta)) = T_n(\cos(\pi+\theta)) = \cos(n(\pi+\theta)) = (-1)^n \cos(n\theta) = (-1)^n T_n(\cos(\theta)).$$

Ainsi $T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ est un polynôme ayant une infinité de racines. On en déduit qu'il s'agit du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_n \text{ est pair (resp. impair) si } n \text{ est pair (resp. impair)}}$.

- *Méthode 3 :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) la propriété « T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair ». Montrons cette propriété par récurrence.
  — $T_0 = 1$ est pair et $T_1 = X$ est impair. Ainsi (P_0) est vraie.
  — Supposons que (P_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_{2(n+1)}(-X) = 2(-X)T_{2n+1}(-X) - T_{2n}(-X) = 2XT_{2n+1}(X) - T_{2n}(X) = T_{2(n+1)}(X)$$

donc $T_{2(n+1)}$ est pair. Ensuite

$$\begin{aligned} T_{2(n+1)+1}(-X) &= 2(-X)T_{2n+2}(-X) - T_{2n+1}(-X) \\ &= -2XT_{2n+2}(X) + T_{2n+1}(X) = -T_{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

donc $T_{2(n+1)+1}$ est impair.

D'où la propriété par récurrence.

3) - On a $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi)$ donc $\boxed{T_n(1) = (-1)^n}$.
- On a $T_n(1) = T_n(\cos(2\pi)) = \cos(n2\pi)$ donc $\boxed{T_n(1) = 1}$
- On a $T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ donc

$$\boxed{T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$$

4) Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(T_p(\cos(\theta))) - T_p(T_n(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p\theta)) - T_p(\cos(n\theta)) = \cos(np\theta) - \cos(pn\theta) = 0.$$

Ainsi $T_p \circ T_n - T_n \circ T_p$ admet une infinité de racines dans $\mathbb{R}$ (tous les réels de $[-1,1]$). Il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_p \circ T_n = T_n \circ T_p}$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction T_n est un polynôme donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\cos$ est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que $f_n = T_n \circ \cos$ également. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(\theta) = -\sin(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta))$ puis

$$\begin{aligned} f_n''(\theta) &= -\cos(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta) \cdot T_n''(\cos(\theta)) \\ &= -\cos(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta)) + (1-\cos^2(\theta)) \cdot T_n''(\cos(\theta)) \\ &= \big(-XT_n' + (1-X^2)T_n'' \big) \circ \cos(\theta) \end{aligned}$$

Mais on a aussi $f_n(\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f_n''(\theta) = -n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos(\theta)).$$

Nous en déduisons que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \big(-XT_n' + (1-X^2)T_n'' + n^2 T_n \big) \circ \cos(\theta) = 0.$$

Le polynôme $-XT_n' + (1-X^2)T_n'' + n^2T_n$ admet donc une infinité de racines sur $\mathbb{R}$ (tous les réels de $[-1,1]$). Il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi $\boxed{(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0}$.

b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-1^2)T_n''(1) - T_n'(1) + n^2T_n(1) = 0$ donc $T_n'(1) = n^2T_n(1)$ et donc $\boxed{T_n'(1) = n^2}$.

Partie C : Factorisation des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) - On a $T_2 = 2X^2-1 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(X^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$ donc $\boxed{T_2 = 2\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.
   - On a $T_3 = 4X^3 - 3X = 4X\left(X^2 - \frac{3}{4}\right)$ donc $\boxed{T_3 = 4X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.
   - On a $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Un complexe z est une racine de T_4 si et seulement si z^2 est une racine de $P = 8X^2 - 8X + 1$. Ce trinôme admet $(-8)^2 - 4 \times 8 = 32$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles : $\frac{8+\sqrt{32}}{16} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{8-\sqrt{32}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Nous en déduisons que z est une racine de T_4 si et seulement si $z \in \left\{ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\}$.
   Ainsi $\boxed{T_4 = 8\left(X - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)}$.
   - $T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5)$. Un complexe non nul z est une racine de T_5 si et seulement si z^2 est une racine de $P = 16X^2 - 20X + 5$. Ce trinôme admet $(-20)^2 - 4 \times 5 \times 16 = 20(20-16) = 80$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles : $\frac{20+\sqrt{80}}{32} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Nous en déduisons que z est une racine de T_5 si et seulement si $z \in \left\{ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right\}$. Ainsi
   $\boxed{T_5 = 16X\left(X - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T_n(\cos(\theta)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(n\theta) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Par périodicité de $\cos$, nous en déduisons que x est racine de T_n si et seulement s'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\boxed{x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$.

3) Soit $(j, k) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $j < k$. On a

$$0 < \frac{(2j+1)\pi}{2n} < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi.$$

Puisque $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, nous en déduisons que

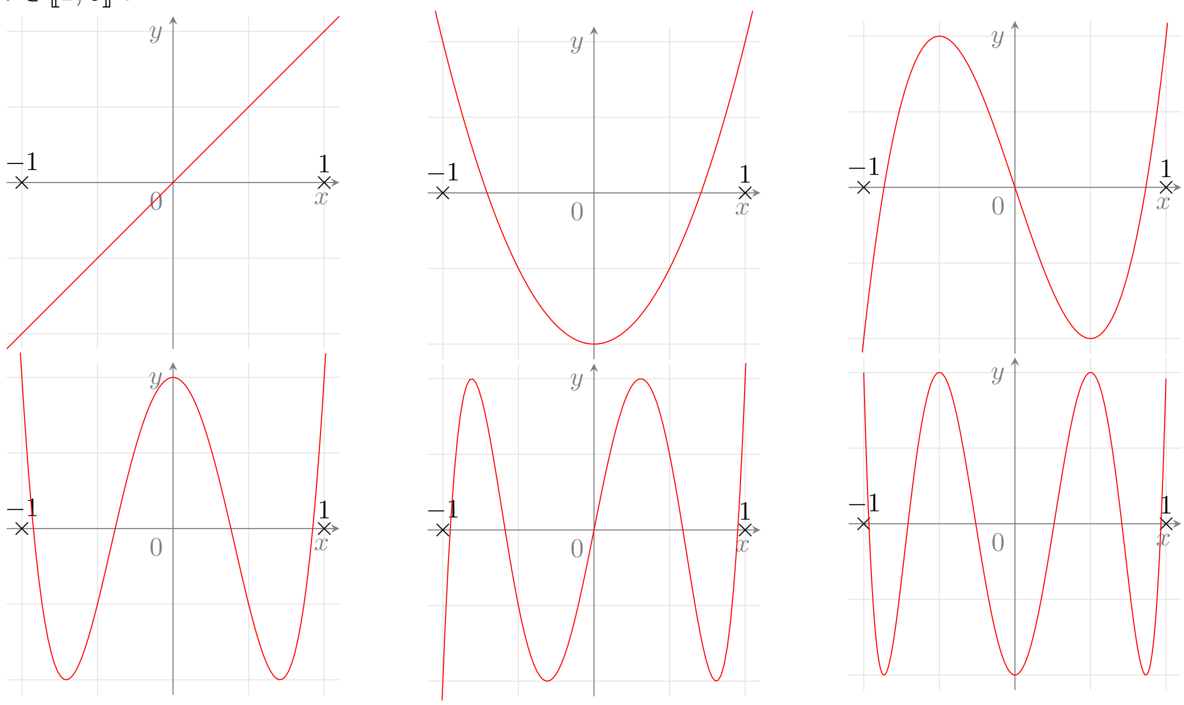
$$\cos(0) > \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right) > \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) > \cos(\pi),$$

c'est-à-dire $1 > x_j > x_k > -1$. Nous en déduisons que $\boxed{\text{les racines } x_0, \ldots, x_{n-1} \text{ sont disjointes.}}$

4) Le polynôme T_n admet n racines réelles distinctes : $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Puisqu'il est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, nous en déduisons que

$$\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).}$$

Pour finir (rassurez-vous ce n'était pas demandé) voici les courbes représentatives de T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \in [\![1, 6]\!]$:



Exercice 2 : Factorisation de polynômes

---

1) Un complexe z est une racine de $X^{12} - 1$ si et seulement si $z^{12} = 1$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ et $z^{12} = 1$.

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^{12} = 1$ si et seulement $12\theta \equiv 0\,[2\pi]$ si et seulement il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{6}$. Nous en déduisons que z est une racine de $X^{12} - 1$ si et seulement si

$$z \in \{1, e^{i\pi/6}, e^{i\pi/3}, e^{i\pi/2}, e^{2i\pi/3}, e^{5i\pi/6}, -1, e^{7i\pi/6}, e^{4i\pi/3}, e^{3i\pi/2}, e^{5i\pi/3}, e^{11\pi/6}\},$$

c'est-à-dire

$$z \in \{1, -1, e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, i, -i, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}, e^{5i\pi/6}, e^{-5i\pi/6}\}.$$

Ainsi $X^{12}-1$ admet exactement 12 racines distinctes (les racines douzièmes de l'unité...) dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{\begin{aligned}X^{12}-1 = (X+1)(X-1)(X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X-e^{i\pi/3})(X-e^{-i\pi/3})\\ (X-i)(X+i)(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{-2i\pi/3})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{-5i\pi/6}).\end{aligned}}$$

On regroupe les racines non réelles avec leur conjugué :

$$\begin{aligned}X^{12}-1 = (X+1)(X-1)(X^2-2\cos(\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(\pi/3)X+1)\\ (X^2+1)(X^2-2\cos(2\pi/3)X+1)(X^2-2\cos(5\pi/6)X+1).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{X^{12}-1 = (X+1)(X-1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).}$$

2) On remarque d'abord que 0 est une racine évidente. Ensuite on a

$$P(j) = j^5-3j^4+10j^3+9j^2+13j = j^2-3j+10+9j^2+13j = 10(j^2+j+1) = 0.$$

Puisque $P\in\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $j^2=\overline{j}$ est encore une racine de P. Il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que $P = X(X-j)(X-\overline{j})Q$. Pour trouver Q on peut effectuer la division euclidienne de P par $X(X-j)(X-\overline{j}) = X^3+X^2+X$. On trouve $Q = X^2-4X+13$.

Le trinôme Q admet pour discriminant $-36=(6i)^2$. Il admet deux racines complexes $\dfrac{4+6i}{2}=2+3i$ et $\dfrac{4-6i}{2}=2-3i$ et donc $Q=(X-2+3i)\,(X-2-3i)$.

Finalement, dans $\mathbb{C}[X]$, $\boxed{P = X(X-j)(X-\overline{j})\,(X-2+3i)\,(X-2-3i)}$.

Et, dans $\mathbb{R}[X]$, $\boxed{P = X(X^2+X+1)(X^2-4X+13)}$.

Exercice 3 : Système à paramètres

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Notons

$$(S)\qquad \begin{cases}\alpha x + \beta y + z = 1\\ x + \alpha\beta y + z = \beta\\ x + \beta y + \alpha z = 1\end{cases}$$

d'inconnues x, y et z réelles. Appliquons la méthode du pivot de Gauss (mais avant on peut commencer par échanger les lignes 1 et 3 pour obtenir un pivot qui est toujours non nul).

$$\begin{aligned}(S) \iff &\begin{cases}x + \beta y + \alpha z = 1 & L_1\leftrightarrow L_3\\ x+\alpha\beta y + z = \beta\\ \alpha x + \beta y + z = 1\end{cases}\\ \iff &\begin{cases}x + \beta y + \alpha z = 1\\ \quad \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta-1 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ \quad \beta(1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z = 1-\alpha & L_3\leftarrow L_3-\alpha L_1\end{cases}\end{aligned}$$

Pour continuer l'algorithme, il faut que le deuxième pivot $\beta(\alpha-1)$ soit non nul. Faisons plusieurs cas :

- Supposons que $\alpha=1$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases}x+\beta y + z = 1\\ 0 = \beta-1\\ 0=0\end{cases}$$

— Si $\beta = 1$, alors les deux dernières équations sont toujours vraies. On peut les enlever et on obtient

$$(S) \iff x = 1 - y - z$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(1,0,0) + y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

— Si $\beta \neq 1$, alors la deuxième équation est fausse. Le système n'admet pas de solution.

- Supposons que $\alpha \neq 1$ et $\beta = 0$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \alpha z = 1 \\ (1-\alpha)z = -1 \\ (1-\alpha^2)z = 1-\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x + \alpha z = 1 \\ z = \dfrac{1}{\alpha - 1} \\ z = \dfrac{1}{\alpha+1} \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles entre elles. Le système n'admet pas de solution.

- Supposons que $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 \\ (2-\alpha-\alpha^2)z = \beta - \alpha & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

On remarque que $2 - \alpha - \alpha^2 = (1-\alpha)(\alpha+2)$.

— Si $\alpha = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y - 2z = 1 \\ -3\beta y + 3z = \beta - 1 \\ 0 = \beta + 2 \end{cases}$$

Si $\beta \neq -2$, alors (S) n'admet pas de solution. Si $\beta = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1-2y \\ z = -1-2y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-1,0,-1) + y(-2,1,-2) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

— Si $\alpha \neq -2$ alors, par remontées successives, on trouve que $z = \dfrac{\beta - \alpha}{(1-\alpha)(\alpha+2)}$ puis

$$y = \frac{1}{\beta(\alpha-1)}\left(\beta - 1 - (1-\alpha)z\right) = \frac{1}{\beta(\alpha-1)}\left(\beta - 1 - \frac{\beta-\alpha}{\alpha+2}\right) = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{\beta(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

et enfin $x = 1 - \beta y - \alpha z = \dfrac{\beta - \alpha}{(1-\alpha)(\alpha+2)}$. Ainsi (S) admet une unique solution :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\left(\alpha - \beta, \alpha + 1 - \frac{2}{\beta}, \alpha - \beta\right).$$

Résumons : l'ensemble des solutions de (S) est

$$\boxed{\begin{cases} \{(1,0,0) + y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} & \text{si } \alpha = \beta = 1 \\ \{(-1,0,-1) + y(-2,1,-2) \,|\, y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \alpha = \beta = -2 \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\left(\alpha-\beta, \alpha+1-\dfrac{2}{\beta}, \alpha-\beta\right) & \text{si } \alpha \notin \{1,-2\} \text{ et } \beta \neq 0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}}$$

Quelques remarques générales :

- Lorsqu'on résout un système linéaire à paramètres avec la méthode du pivot de Gauss, on fait bien attention à ce que les pivots successifs soient non nuls. Pour s'en sortir, on fait plusieurs cas.
- On n'utilise pas la fonction Arccos car elle n'est pas au programme. D'ailleurs, pour information, elle n'est définie que sur $[-1,1]$.
- Pour remplacer $\cos(\theta)$ par X (ce qui arrive à nombreuses reprises dans l'exercice 1), il faut systématiquement utiliser le fait que deux polynômes qui coïncident un nombre infini de valeurs sont égaux. C'est une propriété fondamentale des polynômes qui est complètement fausse pour des fonctions générales.
- Lorsqu'on donne la factorisation d'un polynôme, on n'oublie pas le coefficient dominant.
- X^2-1 n'est pas un polynôme mis sous forme factorisée... ni dans $\mathbb{C}[X]$, ni dans $\mathbb{R}[X]$. On a $X^2-1=(X-1)(X+1)$.
- Il est très peu rigoureuse de faire le changement de variable $x=X^2$ car X désigne une fonction. On réserve les changements de variables aux réels. Par exemple on pose $\zeta=z^2$ où z est une racine du polynôme. Ou encore on peut aussi dire, par exemple, que z est une racine de X^4+X^2+1 si et seulement si z^2 est racine de X^2+X+1.