Devoir maison n° 10

À rendre le mardi 30 janvier 2018

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Polynômes de Tchebychev

Partie A : Existence et unicité des polynômes de Tchebychev

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   Pour l'existence, on pourra développer $\cos(n\theta)$*, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, à l'aide de la formule de Moivre (cf. chapitre 4).*
2) Montrer que $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
3) Déterminer T_2, T_3, T_4 et T_5 à l'aide de la formule de récurrence.

Partie B : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant a_n.
   On utilisera une récurrence double à partir de la formule de la question 2 de la partie A.
2) Déterminer la parité de T_n en fonction de n.
3) Calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.
4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_p(T_n(\cos(\theta)))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que $T_p \circ T_n = T_n \circ T_p$.
5)
   a) Montrer que $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$.
   b) En déduire $T_n'(1)$.

Partie C : Factorisation des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Factoriser les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5.
   On se ramènera à des trinômes du second degré.
2) Montrer qu'un réel x est une racine de T_n si et seulement s'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
3) Montrer que ces n racines sont toutes distinctes. Notons les $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respectivement.
   On pourra montrer que $x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0$.
4) En déduire une factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

CHEBYSHEV POLYNOMIALS WILL RETURN

Exercice 2 : Factorisation de polynômes

1) Factoriser le polynôme $X^{12} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Factoriser le polynôme $P = X^5 - 3X^4 + 10X^3 + 9X^2 + 13X$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   Indice : on pourra vérifier que $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine de P et en déduire une autre racine complexe.

Exercice 3 : Système à paramètres

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système à paramètres

$$\begin{cases} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha\beta y & + & z & = & \beta \\ x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{cases}$$

d'inconnues x, y et z réelles.