Devoir maison n° 1

À rendre le vendredi 15 septembre 2017

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=-1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n+4n+2$.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_n\in\mathbb{N}^*$.
   c) En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $v_n=\dfrac{u_n+1}{3^{n-1}}$.
   a) Calculer $v_{n+1}-v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=4\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{3^k}$.
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $w_n=u_n+2n+2$.
   a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   b) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.$$

5) Donnons-nous n un entier naturel.
   a) Justifier que la fonction $f_n : x\longmapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Expliciter $f_n'(x)$ pour tout réel x.
   b) Donner (sans démonstration) une expression de $f_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   c) En déduire que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\qquad \sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

   d) Retrouver le résultat de la question 4.

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x\longmapsto\dfrac{1}{\ln(1-x+\sqrt{x+1})}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^6+\dfrac{36}{x^2}>13x^2$.