Correction du concours blanc n° 1

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Questions de cours.**

a) On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour tous événements A et B incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

b) On dit que f est continue à droite en $x_0 \in I$ (n'étant pas l'éventuelle extrémité droite finie de I) si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

c) Il y a trois formulations du théorème des valeurs intermédiaires (il suffisait d'en donner une) :

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Notons

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad m = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in]m, M[$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$.

2) Le théorème de transfert avec $g : x \longmapsto x2^{-x}$ nous assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{n} g(k)\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k2^{-k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{p}{2}\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j} \left(\frac{p}{2}\right)^{j+1} (1-p)^{n-1-j}, \end{aligned}$$

via le changement de variables $j = k - 1$. On a donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{np}{2} \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j} \left(\frac{p}{2}\right)^j (1-p)^{n-1-j} = \frac{np}{2} \left(\frac{p}{2} + 1 - p\right)^{n-1} = \frac{np}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{n-1}.$$

3) a)

- La fonction $\sin$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto 1 - \sqrt{x}$ est définie et continue sur $]0, 1[$. Ainsi la fonction $x \longmapsto \sin(1 - \sqrt{x})$ l'est également. Enfin la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$ est définie et continue sur $]0, 1[$ donc c'est le cas de la fonction f qui est le produit de ces deux fonctions.
- La fonction f est définie et continue sur $[1, +\infty[$ en tant que produit des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto 2^{-\sqrt[3]{x}}$ qui le sont (la fonction racine cubique étant définie et continue sur $[1, +\infty[$).

Ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à montrer qu'elle est continue en 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \sqrt{x})} \dfrac{\sin(1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}}$. On a $\lim\limits_{x \to 1^+} (1 - \sqrt{x}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sin(1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(1)$. Nous en déduisons que f est continue en 1 et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

b) • Par continuité, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-x} = \sin(1)$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et donc on ne peut pas prolonger f par continuité en 0.

• Soit $x > 1$. Si $y = \sqrt[3]{x}$, alors $x = y^3$ et donc $x^2 2^{-\sqrt[3]{x}} = y^6 2^{-y}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{y \to +\infty} y^6 2^{-y} = 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

c)

```
x=input('Entrez un réel x :');
if       (x>0)&(x<1)    then
         y=sin(1-sqrt(x))/(x*(1-x));
         disp('f(x)='+string(y));
elseif   x>=1    then
         y=(x∧3)*2∧(-x∧(1/3));
         disp('f(x)='+string(y));
else
         disp('Erreur : '+string(x)+' est négatif'.)
end
```

4)

```
n=input('Entrez un entier naturel n :');
s=1; u=1;
for   k=1:n
      u=u/k; s=s+u;
end
disp('La somme des 1/k! pour k allant de 0 à '+string(n)+' est '+string(s)+'.') ;
```

Exercice 2 : Urnes de Pólya

1) a) Puisque l'urne contient r_0 boules rouges et b_0 boules noires et puisque le tirage se fait uniformément, on a $p_1 = \mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$.

b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $(R_1, \overline{R_1})$ d'événements de probabilités non nulles, on a

$$p_2 = \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}_{\overline{R}_1}(R_2)\mathbb{P}(\overline{R}_1).$$

Si on a pioché une boule rouge au premier tirage alors on se retrouve avec $r_0 + d$ boules rouges et b_0 boules bleues avant le deuxième tirage si bien que $\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r_0+d}{r_0+d+b_0}$. Si on a pioché une boule bleue au premier tirage alors on se retrouve avec r_0 boules rouges et $b_0 + d$ boules bleues avant le deuxième tirage si bien que $\mathbb{P}_{\overline{R}_1}(R_2) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0+d}$. Ainsi

$$p_2 = \frac{r_0+d}{r_0+b_0+d} \times \frac{r_0}{r_0+b_0} + \frac{r_0}{r_0+b_0+d} \times \frac{b_0}{r_0+b_0} = \frac{r_0}{r_0+b_0} = p_1.$$

c) La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_{R_2}(R_1) = \frac{\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\mathbb{P}_{R_1}(R_2)p_1}{p_2} = \mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{r_0+d}{r_0+b_0+d}.$$

d) On a $\mathbb{P}_{R_2}(R_1) \neq \mathbb{P}(R_1)$ donc R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

a) L'événement « les n premières boules tirées sont rouges » est $\bigcap\limits_{k=1}^{n} R_k$. Il est immédiat que la probabilité de cet événement est non nulle et la probabilité des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \mathbb{P}(R_1) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k).$$

Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Sachant que $R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}$ est réalisé, c'est-à-dire que les $k-1$ premières boules tirées sont rouges, l'urne contient b_0 boules bleues et $r_0+(k-1)d$ boules rouges. Ainsi $\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{r_0+(k-1)d}{r_0+(k-1)d+b_0}$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \frac{r_0}{r_0+b_0} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{r_0+(k-1)d}{r_0+(k-1)d+b_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{r_0+kd}{r_0+b_0+kd}.$$

b) L'événement « la première boule tirée soit bleue et les $n-1$ suivantes rouges » est $\overline{R}_1 \cap \bigcap\limits_{k=2}^{n} R_k$. Il est immédiat que la probabilité de cet événement est non nulle et la probabilité des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}\left(\overline{R}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} R_k\right) = \mathbb{P}(\overline{R}_1) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{\overline{R}_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k).$$

Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Sachant que $\overline{R}_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}$ est réalisé, c'est-à-dire que la première boule tirée est bleue et les $k-2$ suivantes rouges, l'urne contient b_0+d boules bleues et $r_0+(k-2)d$ boules rouges. Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{R}_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{r_0+(k-2)d}{r_0+(k-2)d+b_0+d}$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}\left(\overline{R}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} R_k\right) = \frac{b_0}{r_0+b_0} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{r_0+(k-2)d}{r_0+b_0+(k-1)d} = \frac{b_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}(r_0+kd)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(r_0+b_0+kd)}.$$

c) Nous en déduisons que la probabilité que les boules 2 à n sont rouges est

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n} R_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) + \mathbb{P}\left(\overline{R}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} R_k\right) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(r_0+kd) + b_0\prod_{k=0}^{n-2}(r_0+kd)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(r_0+b_0+kd)}$$

$$= \frac{(b_0+r_0+(n-1)d)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}(r_0+kd)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(r_0+b_0+kd)} = \prod_{k=0}^{n-2} \frac{r_0+kd}{r_0+b_0+kd}.$$

Ainsi la probabilité que la première boule soit rouge sachant que les $n-1$ suivantes sont rouges est

$$\mathbb{P}_{R_2\cap\cdots\cap R_n}(R_1) = \frac{\mathbb{P}(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n)}{\mathbb{P}(R_2\cap\cdots\cap R_n)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{r_0+kd}{r_0+b_0+kd}}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}\frac{r_0+kd}{r_0+b_0+kd}} = \frac{r_0+(n-1)d}{r_0+b_0+(n-1)d}.$$

Cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Au moment où on pioche la n-ième boule, on a déjà réalisé $n-1$ tirages et donc on a ajouté $(n-1)d$ boules supplémentaires dans l'urne. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, si on a ajouté k boules rouges et $n-1-k$ boules bleues, alors il a précisément r_0+kd boules dans l'urne. Ainsi $N_n(\Omega) = \{r_0+kd \mid k \in [\![0,n-1]\!]\}$.

b) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Si $N_n = r_0+kd$, alors il y a k boules rouges dans l'urne et $b_0+r_0+(n-1)d$ boules en tout. Puisque le tirage a lieu uniformément, on a $\mathbb{P}_{[N_n=r_0+kd]}(R_n) = \dfrac{r_0+kd}{r_0+b_0+(n-1)d}$.

c) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à N_n, on obtient

$$p_n = \mathbb{P}(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[N_n=r_0+kd]}(R_n)\mathbb{P}(N_n = r_0+kd) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_0+kd}{r_0+b_0+(n-1)d}\mathbb{P}(N_n = r_0+kd)$$
$$= \frac{1}{r_0+b_0+(n-1)d}\sum_{k=0}^{n-1}(r_0+kd)\mathbb{P}(N_n = r_0+kd) = \frac{\mathbb{E}(N_n)}{r_0+b_0+(n-1)d}.$$

d) Si R_n est réalisé, alors on rajoute d boules rouges dans l'urne et donc $N_{n+1} - N_n = d$. Si R_n n'est pas réalisé, alors on rajoute d boules bleues dans l'urne et donc $N_{n+1} - N_n = 0$. Nous en déduisons que X_n ne prend que deux valeurs : 0 et 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(N_{n+1} - N_n = d) = \mathbb{P}(R_n) = p_n$. Ainsi $\mathbb{E}(X_n) = p_n$.

e) Nous avons, par linéarité et additivité de l'espérance,

$$p_n = \mathbb{E}\left(\frac{N_{n+1}-N_n}{d}\right) = \frac{1}{d}\mathbb{E}\left(N_{n+1}-N_n\right) = \frac{1}{d}\big(\mathbb{E}(N_{n+1}) - \mathbb{E}(N_n)\big)$$

donc $\mathbb{E}(N_{n+1}) = dp_n + \mathbb{E}(N_n)$. Ainsi

$$p_{n+1} = \frac{\mathbb{E}(N_{n+1})}{r_0+b_0+nd} = \frac{dp_n + \mathbb{E}(N_n)}{r_0+b_0+nd} = \frac{dp_n + p_n(r_0+b_0+(n-1)d)}{r_0+b_0+nd} = p_n.$$

f) Nous en déduisons que $p_n = p_1 = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$. On remarque que la probabilité de piocher une boule rouge est la même à chaque étape. En particulier elle ne dépend pas du nombre d de boules ajoutés.

Exercice 3 : Lancers de boules dans des cases

1) Puisque les lancers sont successifs et indépendants, on peut considérer $\Omega = [\![1, N]\!]^n$ muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Si $\omega \in \Omega$ alors, pour tout $j \in [\![1, n[\![$, la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de ω représente le numéro de la case dans laquelle se trouve la $j^{\text{ième}}$ boule. On a $\mathrm{card}(\Omega) = N^n$.

2) Au minimum, il y a une seule case atteinte (toutes les boules dans la même case) et, puisque $n \geqslant N$, au maximum, les N cases sont occupé.

   Pour tout $k \in [\![1, N[\![$, $\mathbb{P}(T_n = k) > 0$. En effet cette probabilité est minorée, par exemple, par la probabilité que les k premières boules aient atterris dans les k premières cases respectivement puis que les $n-k$ suivantes dans la première case (cette probabilité étant égale, par indépendance des lancers à $\dfrac{1}{N^n} > 0$). Ainsi $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

3)
   - T_1 est le nombre de cases atteintes après un seul lancer si bien que $T_1 = \{1\}$ et $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$.
   - T_2 est le nombre de cases atteintes après deux lancers donc $T_2 = \{1, 2\}$. Nous avons $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \dfrac{\mathrm{card}([T_1 = 1])}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Or $[T_2 = 1]$ est l'événement $\{(1,1), (2,2), \ldots, (N,N)\}$ dont le cardinal est égale à N. Ainsi

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{N-1}{N}.$$

4)
   - Réaliser l'événement $[T_n = 1]$ revient à choisir une case (N choix) puis à placer toutes les boules dans cette case (1 choix). Ainsi $\mathrm{card}([T_n = 1]) = N$ et donc $\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{N}{N^n} = \dfrac{1}{N^{n-1}}$.
   - Réaliser l'événement $[T_n = 2]$ revient à choisir deux cases ($\binom{N}{2}$ choix) puis à placer les boules au hasard dans ces deux cases ($2^n - 2$ choix : 2 choix pour chacune des n boules mais il faut exclure les deux configurations où les boules sont toutes dans une seule des deux cases). Ainsi $\mathrm{card}([T_n = 2]) = \binom{N}{2}(2^n - 2)$ et donc $\mathbb{P}(T_n = 2) = \dfrac{N(N-1)(2^n-2)}{2\,N^n} = \dfrac{(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^{n-1}}$.

5) Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Soit $n > N$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à la variable aléatoire réelle finie T_n, on a

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{[T_n=j]}(T_{n+1} = k)\mathbb{P}(T_n = j).$$

Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Sachant que $T_n = j$, si on lance la $(n+1)^{\text{ième}}$ boule, alors

- ou bien elle tombe dans une des j cases déjà occupées (ce qui arrive avec probabilité $\frac{j}{N}$) et $[T_{n+1} = j]$ est réalisé.
- ou bien elle tombe dans une case jusqu'alors inoccupée (ce qui arrive avec probabilité $\frac{N-j}{N}$) et $[T_{n+1} = j + 1]$ est réalisé.

Par conséquent $\mathbb{P}_{[T_n=k]}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}$, $\mathbb{P}_{[T_n=k-1]}(T_{n+1} = k) = \dfrac{N-k+1}{N}$ et $\mathbb{P}_{[T_n=j]}(T_{n+1} = k) = 0$ pour tout $j \in [\![1, N]\!]\backslash\{k, k-1\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

6) Considérons G_n la fonction génératrice de T_n, c'est-à-dire la fonction polynomiale définie par

a) On a $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = k)1^k = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = k) = 1$ puisque $([T_n = k])_{1\leqslant k\leqslant N}$ est un système complet d'événements.

b) La fonction G_n est polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_n'(x) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1}.$$

Ainsi $G_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{E}(T_n)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)x^k.$$

Regardons chaque somme séparément.

- On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k)x^k = \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1} = \frac{x}{N}G_n'(x)$.
- Faisons le changement de variable $j = k - 1$ dans la deuxième somme :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)x^j = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N}\mathbb{P}(T_n = j)x^{j+1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{N-j}{N}\mathbb{P}(T_n = j)x^{j+1},$$

puisque $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$ et $\dfrac{N-N}{N}\mathbb{P}(T_n = N) = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)x^j &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = j)x^{j+1} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}(T_n = j)x^{j+1} \\ &= x\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = j)x^j - \frac{x^2}{N}\sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}(T_n = j)x^{j-1} \\ &= xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k = \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

d) Nous avons $\mathbb{E}(T_{n+1}) = G_{n+1}'(1)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_{n+1}'(x) = \frac{(1-2x)}{N}G_n'(x) + \frac{x - x^2}{N}G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x).$$

Ainsi $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \dfrac{-1}{N}G_n'(1) + \dfrac{0}{N}G_n''(1) + G_n(1) + G_n'(1) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n)$.

e) La suite $(\mathbb{E}(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)x$ si et seulement si $x = N$. Nous en déduisons que la suite $(\mathbb{E}(T_n) - N)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{N}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

Puisque $\left|1 - \dfrac{1}{N}\right| < 1$, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N$.

Exercice 4 : Une équation fonctionnelle

1) Par hypothèse, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = \frac{f\big(\sqrt{(-x)^2 + y^2}\big)}{f(y_0)} = f(x).$$

Ainsi f est paire.

2) Supposons que $f(0) = 0$. Alors (en prenant $y = 0$) on a $f(x) = f(\sqrt{x^2 + 0^2}) = f(x)f(y) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier par parité. Nous avons exclu ce cas. Ainsi $f(0) \neq 0$. Ensuite $f(0) = f(\sqrt{0^2 + 0^2}) = f(0)f(0)$ donc $f(0) = 1$.

3) Supposons que f s'annule en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{2^n}}$.

a) Commençons par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{2}x) = f(\sqrt{2x^2}) = f(\sqrt{x^2 + x^2}) = f(x)^2$. Procédons ensuite par récurrence sur n. L'initialisation est immédiate puisque $f(x_0) = 0$. Supposons que $f(u_n) = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$f(u_{n+1})^2 = f(\sqrt{2}u_{n+1}) = f\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{\sqrt{2\cdot 2^n}}\right) = f(u_n) = 0.$$

Ainsi $f(u_{n+1}) = 0$. Par récurrence, nous obtenons que $f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Puisque f est continue en 0, nous obtenons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0)$ et donc $f(0) = 0$. C'est absurde. Ainsi f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$

4) *Première méthode :* On sait déjà que $f(0) = 1 > 0$. Si il existe $y \in \mathbb{R}_+$ telle que $f(y) < 0$ alors, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $0 \in [f(y), 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'existence de $c \in [0, y]$ tel que $f(c) = 0$. C'est absurde. Ainsi f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

Deuxième méthode : On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \geqslant 0$. Et puisque f ne s'annule pas, on en déduit qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

5) a) La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ car :

- $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,
- $\ln$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On a

$$\begin{aligned} g(x+y) = \ln\left(f(\sqrt{x+y})\right) &= \ln\left(f\left(\sqrt{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2}\right)\right) \\ &= \ln\left(f\left(\sqrt{x}\right) f\left(\sqrt{y}\right)\right) \\ &= \ln\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right) + \ln\left(f\left(\sqrt{y}\right)\right) = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

c) D'après l'exercice 9 du TD n° 11, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = ax$ et donc $f(\sqrt{x}) = e^{g(x)} = e^{ax}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f(\sqrt{x^2}) = e^{ax^2}.$$

Puisque f est paire, nous en déduisons que $f(x) = e^{ax^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6) Réciproquement, si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax^2}$, alors f est bien continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = e^{a(x^2+y^2)} = e^{ax^2}e^{ay^2} = f(x)f(y).$$

Ainsi f est bien solution au problème.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions au problème est constitué de la fonction constante égale à 0 et des fonctions de la forme $x \longmapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Convergence au sens de Cesàro (bonus)

1) Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$ et donc

$$\sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = (n - n_0 + 1)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}.$$

2) La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell)$ est un réel qui ne dépend pas de n. Par conséquent $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} (u_k - \ell).$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il découle de la question 2 qu'il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} (u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_0')$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. D'où la convergence annoncée.

4) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$. Donnons-nous $A>0$. Il existe alors $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant 2(A+1)$ et donc $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}u_k\geqslant\frac{n-n_0+1}{n}2(A+1)=\left(1-\frac{n_0+1}{n}\right)2(A+1)$.

Puisque $\displaystyle\frac{n_0+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}u_k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il existe $n_0'\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0'$, $\displaystyle 1-\frac{n_0+1}{n}\geqslant\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}u_k\geqslant -1$. Ainsi, pour tout $n\geqslant\max(n_0,n_0')$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}u_k+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}u_k\geqslant -1+\frac{1}{2}2(A+1)=A.$$

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Quelques remarques générales :

- $\sin(1)\neq 1$.
- Dans le TVI, aucune hypothèse de monotonie n'est requise.
- Attention, si X est une variable aléatoire finie et si g est une fonction définie sur $X(\Omega)$, il est faux que $\mathbb{E}(g(X))=g(\mathbb{E}(X))$ (à part quand g est affine, ce qu'on appelle alors la linéarité de l'espérance).
- Attention si f est définie sur $]a,c[$, continue sur $]a,b[$ et sur $[b,c[$, alors on ne peut pas conclure a priori que f est continue sur $]a,c[$ tout entier. Il faut vérifier également que la limite à gauche de f en c est égale à $f(c)$. On l'a vu en cours...
- Attention à ne pas invoquer les croissances comparées n'importe quand. On ne les utilise que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$ (ou les puissances généralisée). En particulier la limite de $x\longmapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 n'est pas une croissance comparée.
- Dans l'exercice 2, Ω modélise toute l'expérience (pas seulement le premier tirage) donc son cardinal n'est pas r_0+b_0. Par ailleurs la probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas l'équiprobabilité sur Ω a priori. Tout ce que l'on sait est que chaque tirage a lieu uniformément parmi les boules présentes au moment du tirage. Mais cela ne nous dit pas a priori que, si on réalise $N\in\mathbb{N}^*$ tirages successifs (avec la règle d'ajout de boules), chaque tirage de N boules a la même probabilité qu'un autre.
- Dans la question 1 de l'exercice 2, il faut simplifier au maximum les expressions trouvées. Cela est valable en mathématiques plus largement : on mène un calcul jusqu'au bout... sinon on ne récolte pas tous les points.
- Pour montrer que deux événements A et B ne sont pas indépendants, on montre que$\mathbb{P}(A\cap B)\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (Attention ce n'est pas parce que des événements semblent dépendre l'un de l'autre au vu de l'expérience que c'est effectivement le cas, on a vu des contre-exemples en cours).
- N'oubliez pas que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2}=|x|$.
- Pour obtenir tous les points, il est INDISPENSABLE de citer les résultats et formules que vous employez (formule des probabilités totales, formule de transfert, etc.) ainsi que les hypothèses permettant de les appliquer (par exemple dans l'exercice 4, pour justifier que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ implique $f(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(0)$, il ne faut pas oublier de dire que f est continue en 0).